Finanční matematika pro každého

8. rozšířené vydání

J. Radová, P. Dvořák, J. Málek

věcné a matematické vysvětlení základních finančních pojmů

metody pro praktické rozhodování soukromých osob i podnikatelů

nové finanční produkty

výborná učebnice pro studenty středních a vysokých škol

řešené praktické příklady

finance

GRADA

GRADA®

Finanční matematika pro každého

8. rozšířené vydání

J. Radová, P. Dvořák, J. Málek

Grada Publishing

Edice Osobní a rodinné finance

**doc. RNDr. Jarmila Radová, Ph.D., doc. Ing. Petr Dvořák, Ph.D.,
doc. Mgr. Jiří Málek, Ph.D.**

Finanční matematika pro každého
8. rozšířené vydání

TIRÁŽ TIŠTĚNÉ PUBLIKACE:

Vydala GRADA Publishing, a.s.
U Průhonu 22, Praha 7,
jako svou 5287. publikaci

Realizace obálky Jan Dvořák
Foto na obálce Allphoto.cz
Sazba Antonín Plicka
Odpovědná redaktorka Ing. Michaela Průšová
Počet stran 304
Osmé vydání, Praha 1993, 1997, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2013
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a.s.

ISBN 978-80-247-4831-3

ELEKTRONICKÉ PUBLIKACE:

ISBN 978-80-247-8721-3 (ve formátu PDF)

GRADA Publishing: *tel.: 234 264 401, fax: 234 264 400, www.grada.cz*

Obsah

Předmluva

I osmé, rozšířené vydání *Finanční matematiky pro každého* se drží osvědčených principů, na kterých byla založena vydání předchozí. To znamená, že srozumitelným způsobem vysvětluje základní matematické postupy využívané v bankovní a finanční praxi širokému okruhu čtenářů.

Knížka se snaží důsledně naplnit to, že by měla být určena skutečně *pro každého*, kdo se z jakéhokoliv důvodu zajímá o finanční matematiku. Nabízí proto jak spolehlivého průvodce při prvních krocích do tajů finančních výpočtů, aniž musí čtenář mít rozsáhlé matematické či ekonomické znalosti, tak může být i cenným rádcem profesionálovi při objasnění matematického zákulisí finančních produktů a investování.

Je koncipována jako učebnice a vychází ze zkušeností autorů při výuce na Vysoké škole ekonomické v Praze. Je proto vhodná pro studenty vysokých, vyšších odborných či středních škol s ekonomickým zaměřením. Snadno se v ní však budou orientovat i ti, kteří si budou chtít doplnit v dnešní době nezbytné znalosti samostudiem.

Obsah knížky je možné rozdělit do dvou celků. První, kapitoly 1 až 6, vysvětluje matematické metody a postupy, které jsou využívány v oblasti financí. Druhý celek, kapitoly 7 až 18, je potom zaměřen na konkrétní aplikace těchto postupů u všech důležitých bankovních a finačních produktů.

Výklad v jednotlivých kapitolách je nejdříve veden v obecné rovině, následně je demonstrován na praktickém příkladě, který je doprovázen i vzorovým řešením.

Pro rychlou orientaci a snadné hledání odpovědi na určitou otázku obsahuje knížka podrobný věcný rejstřík.

Věříme, že Finanční matematika pro každého poskytne každému, kdo ji otevře, zajímavé informace, které využije při finančním rozhodování v podnikání či správě svých soukromých financí.

Srpen 2013 autoři

1. Základní pojmy

Finanční matematika není nic jiného než využití matematiky ve finanční oblasti. V textu se proto budeme setkávat s některými matematickými pojmy a postupy. Pro ty, kteří potřebují zopakovat základy matematiky, potřebné ve finanční matematice, je určena úvodní kapitola.

1.1 Procentový počet

Slovo **procento** je latinského původu a znamená setinu celku nebo základu.

Základem procentového počtu je skutečnost, že velikost dané veličiny neuvádíme absolutně v daných jednotkách, ale relativně (poměrně). To znamená, že uvedeme její poměr k velikosti odpovídající veličiny (vyjádřené ve stejných jednotkách), kterou jsme zvolili za základ.

Pro jedno procento potom platí:

$$1\,\% = \frac{1}{100},$$

tzn. jedno procento je jedna setina ze základu = 0,01 základu; potom:

$100\,\% = 1 \text{ celek} = \text{celý základ.}$

V jednoduchých úlohách s procenty se objevují tři základní veličiny:

- základ (budeme označovat z);
- počet procent (budeme označovat p);
- procentová část, která je vyjádřením části, odpovídající počtu procent v absolutních jednotkách (budeme označovat x).

Při výpočtu známe dva údaje a třetí údaj počítáme**.** Podle toho rozlišujeme tři základní typy úloh:

1. výpočet procentové části x;
2. výpočet základu z;
3. výpočet počtu procent p.

Výpočet neznámé v jednotlivých typech úloh provádíme podle následujících vzorců:

$$x = z \cdot \frac{p}{100}, \tag{1-1}$$

$$z = \frac{x \cdot 100}{p}, \tag{1-2}$$

$$p = \frac{x \cdot 100}{z}, \tag{1-3}$$

kde x je procentová část;
z je základ;
p je počet procent.

Jednou z možností výpočtu neznámého údaje v úlohách s procenty je i použití úměry neboli trojčlenky.

Příklad 1-1 *Výpočet procentové části*

Kolik činí sjednaný podíl na zisku ve výši 15 % z prodejní ceny, má-li výrobní cena výši 2 000 Kč a prodejní cena činí 115 % výrobní ceny?

Řešení

Nejprve vypočítáme, jak vysoká byla prodejní cena. To je problém výpočtu procentové části podle vztahu (1-1). Dosadíme z = 2 000, p = 115 %. Potom:

$$x = z \cdot \frac{p}{100} = 2\,000 \cdot \frac{115}{100} = 2\,300.$$

Prodejní cena činila 2 300 Kč.

Nyní potřebujeme zjistit, kolik činí podíl na zisku ve výši 15 % z prodejní ceny. Opět počítáme procentovou část. Nyní dosadíme p = 15 %, z = 2 300:

$$x = z \cdot \frac{p}{100} = 2\,300 \cdot \frac{15}{100} = 345.$$

Zisk činí 345 Kč.

Příklad 1-2 *Výpočet základu v procentovém počtu*

Daň z příjmu činila při sazbě daně 27,5 % částku 1 170 Kč. Jak vysoký byl příjem (od odpočitatelných položek abstrahujeme)?

Řešení

Kromě výše uvedených vzorců je možno použít trojčlenku:

27,5 % odpovídá 1 170 Kč;
100 % odpovídá z Kč.

Sestavíme rovnost:

$$\frac{z}{1170} = \frac{100}{27{,}5};$$

$$z = \frac{100}{27{,}5} \cdot 1170 = 4\,254{,}54.$$

Hrubý příjem činil 4 255 Kč.

1.2 Funkce

Dříve, než budeme zjednodušeně definovat pojem funkce, seznámíme se s pojmem **proměnná.** Jestliže říkáme, že celková cena zboží závisí na jeho množství, pak proměnné jsou množství a celková cena, konstanta (konstantní veličina) je cena za jednotkové množství. Označíme-li celkovou cenu y, množství zboží x a cenu za jednotkové množství c, pak x, y jsou v tomto případě proměnné a c je konstanta.

Funkcí budeme rozumět předpis, kterým jednoznačně přiřadíme určité hodnotě proměnné x určitou hodnotu proměnné y. Píšeme potom:

$$y = f(x).$$

Proměnnou x nazýváme **nezávisle proměnná** a proměnnou y nazýváme **závisle proměnná.** Hodnota proměnné y závisí na hodnotě proměnné x.

Máme-li např. cenu za 1 kg banánů 28 Kč, pak celková cena nakoupeného množství banánů bude záviset právě na hmotnosti banánů, které nakoupíme.

Podle výše uvedeného příkladu bude tedy hmotnost zboží x nezávisle proměnná a celková cena y závisle proměnná.

Funkce bude mít v tomto jednoduchém případě tvar:

$$y = 28 \cdot x.$$

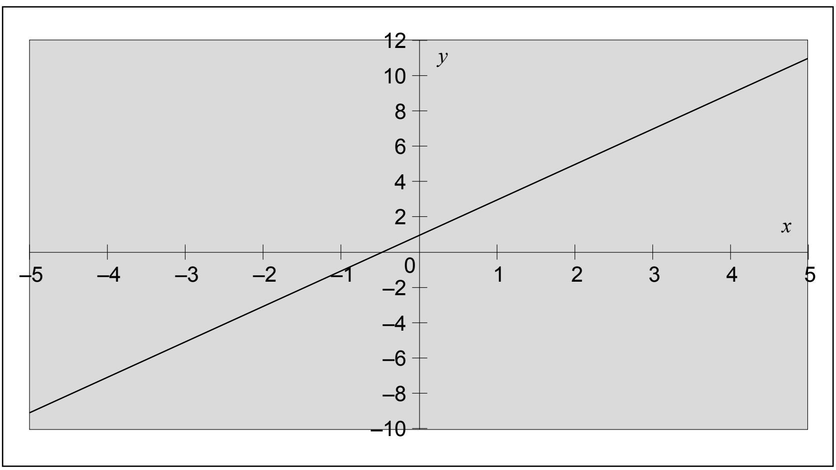
V našem textu se setkáme s několika funkcemi, které si nyní dále popíšeme, neboť nám budou později užitečné.

1.2.1 Lineární funkce

Funkční předpis pro lineární funkci bude mít tvar:

$$y = k \cdot x + q, \tag{1-4}$$

kde k, q jsou konstanty;
x je nezávisle proměnná;
y je závisle proměnná.



Obrázek 1.1 Graf lineární funkce $y = 2 \cdot x + 1$

Graficky je možno tuto funkci znázornit přímkou. Konstanta k určuje směr přímky a konstanta q určuje průsečík s osou y.

Lineární funkci můžeme ukázat třeba na příkladu poplatků za telefon. Paušální platba, nezávislá na počtu uskutečněných hovorů, je konstanta q, konstanta k je cenou za jeden impuls a nezávisle proměnnou x je počet uskutečněných impulsů. Závisle proměnná y je potom výše celkového poplatku za telefon.

V ekonomických úvahách se často užívá závislosti zvané **přímá úměrnost,** která je znázorněna právě lineární funkcí.

Říkáme, že dvě veličiny jsou přímo úměrné, jestliže podíl každých dvou odpovídajících si hodnot y_i / x_i je roven konstantě. Tedy:

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1} = k.$$

Funkční předpis je tedy dán vzorcem:

$$y = k \cdot x. \qquad \textbf{(1-5)}$$

Grafem je přímka, procházející počátkem (průsečíkem os x a y). Známe-li konstantu k, můžeme ke kterékoli hodnotě x_i vypočítat hodnotu y_i.

Předchozí příklad by byl přímou úměrností, jestliže by telefonní poplatky neobsahovaly paušální platbu.

1.2.2 Rovnoosá hyperbola

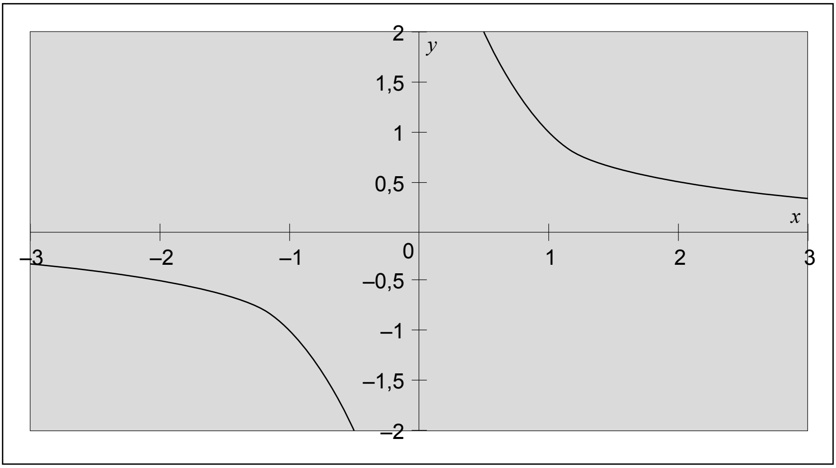
Dále se v ekonomických úvahách setkáváme se závislostí zvanou **nepřímá úměrnost.** Říkáme, že dvě veličiny jsou nepřímo úměrné, jestliže součin každých dvou odpovídajících si hodnot x_i, y_i je roven konstantě. Tedy:

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = k.$$

Funkční předpis je v tomto případě dán vzorcem:

$$y = \frac{k}{x}. \qquad \textbf{(1-6)}$$

Grafem nepřímé úměrnosti je hyperbola. V případě, že $k = 1$, se nazývá rovnoosá.



Obrázek 1.2 Graf rovnoosé hyperboly

V našem příkladu s telefony (bez paušální platby, tj. $q = 0$) jsme řekli, že celkový poplatek za telefon (y) je dán součinem ceny za jeden impuls (k) a počtu uskutečněných impulsů (x), to je:

$$\text{celkový poplatek } y = \text{cena impulsu } k \cdot \text{počet impulsů } x.$$

Celkový poplatek y je přímo úměrný ceně za jeden impuls k.

Pokud budeme však naopak znát celkový poplatek a cenu jednoho impulsu a budeme chtít zjistit počet uskutečněných impulsů, můžeme tak učinit dosazením do vzorce:

$$\text{počet impulsů} = \frac{\text{celkový poplatek}}{\text{cena za jeden impuls}}.$$

Vidíme, že počet impulsů je (při daném celkovém poplatku) nepřímo úměrný ceně za jeden impuls.

1.2.3 Exponenciální funkce

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci, kde nezávisle proměnná se vyskytuje jako exponent. To znamená, že ji můžeme psát ve tvaru:

$$y = a^x, \tag{1-7}$$

kde $a > 0$, x je racionální číslo[1].

Z matematiky víme, že každé reálné číslo[2] umocněné na nultou se rovná jedné. Z toho můžeme pro exponenciální křivky odvodit zajímavou vlastnost. Pro všechna a platí, že pro $x = 0$ se rovná $a^x = 1$. Z toho vyplývá, že všechny exponenciální křivky procházejí bodem (0,1), který leží na ose y.

Speciální průběh má exponenciální funkce, je-li a rovno jedné ($a = 1$). Pak pro všechna x platí, že y se rovná také jedné ($y = 1$), neboť číslo jedna umocněné na libovolné číslo je opět číslo jedna. Grafem je v tomto případě přímka rovnoběžná s osou x.

Funkční hodnoty exponenciální funkce y budou pro libovolné hodnoty proměnné x kladné.

Speciálním případem je funkce:

$$y = \mathbf{e}^x,$$

kde $\mathbf{e}$ představuje tzv. **Eulerovo číslo,** definované pomocí limity[3] jako:

$$\mathbf{e} = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \tag{1-8}$$

což budeme potřebovat v oddílu 3.9 při definici úrokové intenzity.

Exponenciální funkci použijeme v oddílu 3.1 při odvozování problematiky složeného úročení.

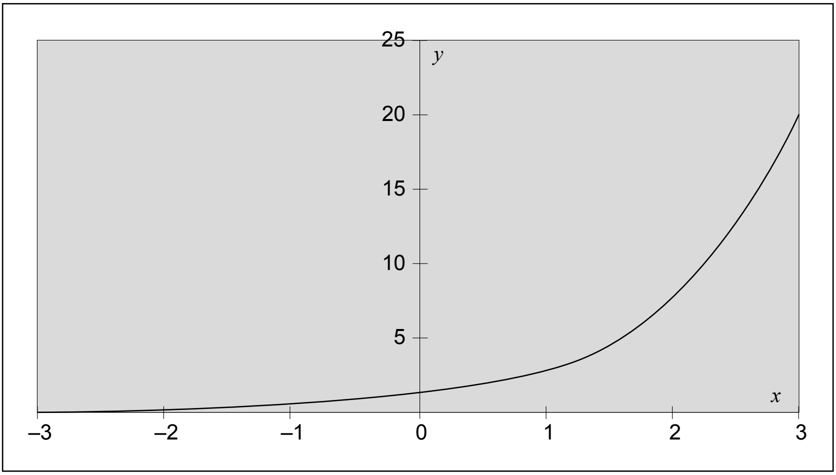
---

1 **Racionální číslo** je číslo, které je možno vyjádřit jako podíl dvou celých čísel. **Celá čísla** jsou čísla: … –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, … Celá kladná čísla nazýváme **přirozená čísla.**

2 **Reálné číslo** je jak číslo racionální, tak číslo, které není možno napsat ve tvaru podílu dvou celých čísel (**číslo iracionální**), např. $\sqrt{2}$.

3 Zde se jedná o limitu posloupnosti (viz oddíl 1.4).

Příklad exponenciální funkce je znázorněn grafem na obrázku 1.3.



Obrázek 1.3 Graf exponenciální funkce $y = \mathrm{ex}$

1.2.4 Logaritmická funkce

Logaritmická funkce je funkcí inverzní k funkci exponenciální. Inverzní funkcí rozumíme funkci, kde původní závisle proměnná se stala nezávisle proměnnou a naopak. Logaritmickou funkci zapisujeme:

$$y = \log_a x, \qquad \textbf{(1-9)}$$

kde nazýváme:

$x \in (0,\infty)$	číslo logaritmované;
$a \neq 1$	základ logaritmu;
y	logaritmus.

Logaritmus y je číslo, kterým když umocníme základ a, dostaneme logaritmované číslo x. To znamená, že platí:

$$a^y = x.$$

Hodnoty nezávisle proměnné x logaritmické funkce musejí být vždy kladné, neboť odpovídají hodnotám závisle proměnné exponenciální funkce, která je inverzní funkcí k funkci logaritmické. Jak jsme viděli, byly funkční hodnoty závisle proměnné exponenciální funkce vždy kladné.

Všechny logaritmické křivky analogicky jako křivky exponenciální procházejí pro všechny hodnoty a stejným bodem, který v případě logaritmických křivek leží na ose x, bodem (1,0).

Pro naše účely budeme užívat **přirozený logaritmus,** kde a = $\mathbf{e}$ a $\mathbf{e}$ je již zmíněné Eulerovo číslo.

Zapisujeme:

$$y = \log_{\mathbf{e}} x = \ln x.$$

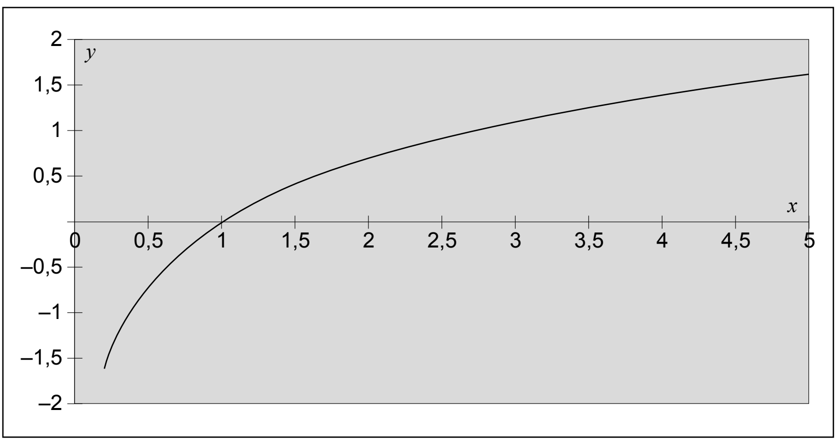
Je-li základ logaritmu a roven deseti (a = 10), hovoříme o **dekadickém logaritmu.** Pak píšeme:

$$y = \log_{10} x.$$

Tedy:

$$y = 10^{y}.$$

Průběh logaritmické funkce pro a = $\mathbf{e}$ je znázorněn grafem na obrázku 1.4.



Obrázek 1.4 Graf logaritmické funkce $y = \ln x$

Pro logaritmy platí pro libovolná čísla $u, v \in (0,\infty)$ a reálná čísla w následující základní vztahy:

$$\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v; \tag{1-10}$$

$$\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v; \tag{1-11}$$

$$\ln u^w = w \cdot \ln u. \tag{1-12}$$

S logaritmickou funkcí se setkáme např. u již zmíněného složeného úročení, kdy známe konečnou (zúročenou) výši kapitálu, jeho výši počáteční a máme určit (při dané úrokové sazbě) dobu uložení.

1.3 Průměry

1.3.1 Aritmetický průměr

Aritmetický průměr m_a je pro n čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definován jako:

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}. \tag{1-13}$$

Zjednodušeně řečeno, aritmetický průměr získáme, když součet daných čísel vydělíme jejich počtem.

Jsou-li mezi danými čísly a_i některá čísla stejná, např. mějme:

n_1 čísel a_1,

n_2 čísel a_2,

:

n_r čísel a_r,

pak můžeme výpočet zjednodušit a jejich aritmetický průměr bude roven:

$$m_a = \frac{n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + \ldots + n_r \cdot a_r}{n_1 + n_2 + \ldots + n_r}, \tag{1-14}$$

kde platí:

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r.$$

V tomto případě hovoříme o **váženém aritmetickém průměru.** Čísla $n_1, n_2, ..., n_r$ se označují jako váhy čísel $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

S aritmetickým průměrem se setkáme při výpočtu střední doby splatnosti více pohledávek.

1.3.2 Geometrický průměr

Vedle obecně známého aritmetického průměru existuje i průměr geometrický.

Pro n kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je geometrický průměr m_g definován jako:

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

neboli jednoduše řečeno jako n-tá odmocnina součinu n čísel.

Jsou-li mezi danými čísly a_i některá čísla stejná, např. mějme:

n_1 čísel a_1,

n_2 čísel a_2,

:

n_r čísel a_r,

pak vzorec pro jejich geometrický průměr můžeme opět zapsat jako:

$$m_g = \sqrt[n]{a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot a_r^{n_r}},$$

kde platí:

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r.$$

Číslo m_g se nazývá **vážený geometrický průměr.**

1.3.3 Vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

Lze dokázat, že pro sobě odpovídající průměry platí, že aritmetický průměr je větší než geometrický průměr.

Symbolicky můžeme tento vztah zapsat:

$m_a > m_g$.

Dokažme nyní, že aritmetický průměr je větší než geometrický, a to pro dvě kladná čísla a_1 a a_2. Důkaz provedeme sporem. Budeme předpokládat, že platí opak, tedy že aritmetický průměr je menší než geometrický:

$m_a < m_g$.

To tedy znamená, že má platit vztah:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} < \sqrt{a_1 \cdot a_2},$$

který dále budeme upravovat:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 \cdot a_2} < 0,$$

$$a_1 + a_2 - 2 \cdot \sqrt{a_1 \cdot a_2} < 0,$$

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 < 0$$

a to není možné, neboť druhá mocnina každého nenulového čísla je větší než nula. Předpoklad, že aritmetický průměr je menší než geometrický, je tedy chybný a sporem jsme dokázali, že platí opak.

1.4 Posloupnosti a řady

Přiřadíme-li každému přirozenému (tj. celému kladnému) číslu n určité reálné číslo a_n, pak souhrn čísel $a_1, a_2, \ldots$ nazýváme **posloupnost**[4].

---

[4] Posloupnost může mít limitu (viz oddíl 1.2.3). Říkáme, že posloupnost má **limitu** rovnou číslu a, jestliže pro skoro všechna n bude absolutní hodnota rozdílu $a_n - a$ menší než jakkoli zvolené malé kladné číslo.

Výraz (součet všech členů posloupnosti):

$$a_1 + a_2 + \ldots$$

nazýváme **řadou** a čísla a_1, a_2, … **členy řady.**

Má-li řada konečný počet členů, nazývá se **konečná,** má-li nekonečný počet členů, nazývá se **nekonečná.**

1.4.1 Aritmetické posloupnosti a řady

Posloupnost, u níž rozdíl (diference) kterýchkoli dvou po sobě jdoucích členů je konstantní, se nazývá **aritmetická.**

Tedy výraz:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \ldots + [a_1 + (n-1)d]$$

se nazývá konečná aritmetická řada,

kde a_1 je první člen řady;
a_n je poslední n-tý člen řady;
n je počet členů;
d je diference.

Pro libovolný k-tý člen konečné aritmetické řady, kde k je 1, 2, …, n, platí:

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d. \qquad \textbf{(1-15)}$$

Pro uvedenou aritmetickou řadu platí, že každý člen je aritmetickým průměrem ze sousedních členů, tedy:

$$a_k = \frac{1}{2} \cdot (a_{k-1} + a_{k+1}).$$

Pro součet prvních n členů aritmetické řady platí:

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}. \qquad \textbf{(1-16)}$$

Logika vzorce vyplývá z toho, že můžeme spárovat (sečíst) vždy dva členy řady – první a poslední, druhý a předposlední atd., přičemž tyto součty jsou konstantní (stále stejné). Takových dvojic můžeme logicky sestavit polovinu z celkového počtu členů řady (n / 2).

Dosadíme-li za a_n ze vzorce (1-15), podle nějž platí:

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d,$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d,$$

do vzorce (1-16), můžeme součet n členů řady vyjádřit:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d).$$

Tyto poznatky budeme potřebovat v kapitole 4 o spoření.

1.4.2 Geometrické řady

Posloupnost, u níž podíl kterýchkoli dvou po sobě jdoucích členů je konstantní, se nazývá **geometrická.**

Tedy výraz:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1},$$

kde a_1 je první člen;
a_n je poslední, n-tý člen;
n je počet členů;
q je kvocient, který se rovná podílu dvou po sobě jdoucích členů,

nazveme **konečná geometrická řada.**

Je-li $q = 1$, obsahuje řada stejné členy a.

Je-li $q > 1$, je řada **rostoucí.**

Je-li $q \in (0,1)$, je řada **klesající.**

Je-li $q < 0$, je řada **střídavá** (se střídavými znaménky).

N-tý člen a_n potom vypočteme podle vzorce:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \tag{1-17}$$

Součet geometrické řady s n členy je pro $q \neq 1$ dán vzorcem:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{1-18}$$

Každý člen geometrické řady je geometrickým průměrem z jeho dvou sousedních členů, což můžeme napsat jako:

$$a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}.$$

Tyto poznatky budeme potřebovat v kapitolách 4 a 5, které jsou věnovány spoření a důchodům.

2. Úročení

Finanční rozhodování patří k velmi důležitým procesům, jejichž podstatu je možno charakterizovat pomocí následujících tří investičních preferencí:

1. Každý investor preferuje více peněz než méně.
2. Každý investor preferuje méně rizika než více.
3. Každý investor preferuje stejné množství peněz dnes spíše než zítra.

Třetí z uvedených možností je spojena s problematikou **časové hodnoty peněz.** To je finanční metoda, která slouží k porovnání dvou či více peněžních částek z různých časových období. Důležitými finančními pojmy, se kterými se při práci s touto metodou setkáváme, jsou **úroková míra a úrok.**

Úrok je veličina, která hraje důležitou úlohu při uzavírání obchodů bank a je významným faktorem, který ovlivní jejich výhodnost jak z hlediska věřitele, tak i dlužníka. Na bázi úrokového počtu je založena celá řada ekonomických úvah a propočtů. Proto se budeme úroku a úrokovým propočtům podrobně věnovat.

2.1 Základní pojmy

Zapůjčí-li jeden subjekt druhému peněžní prostředky, bude požadovat odměnu jako náhradu za dočasnou ztrátu kapitálu, za riziko spojené se změnami tohoto kapitálu (s inflací) a za nejistotu, že kapitál nebude splacen v dané lhůtě a výši. Tato odměna se nazývá **úrok.**

Věřitel tedy získává úrok za to, že poskytl své peníze dočasně (někomu) jinému.

Naopak z pohledu dlužníka je úrok cena, kterou platí za získání úvěru.

Dobu, po kterou je peněžní částka (kapitál) uložena nebo zapůjčena, tedy za kterou počítáme úrok, nazýváme **doba splatnosti (úroková doba, doba existence smluvního vztahu).**

Vyjádříme-li úrok v procentech z hodnoty kapitálu za časové období, dostaneme **úrokovou sazbu (úrokovou míru)**[5]. Ve finanční teorii a praxi existuje několik druhů úrokových měr. V našem výkladu budeme pracovat celkem se čtyřmi základními druhy:

- nominální úrokovou mírou;
- efektivní úrokovou mírou;
- zvažovanou úrokovou mírou, požadovanou výnosností;
- vnitřním výnosovým procentem.

Nominální úroková míra představuje sjednanou úrokovou míru mezi vypůjčovatelem a poskytovatelem kapitálu a jako taková je uvedena v úvěrové smlouvě, vytištěna na plášti dluhopisu či jiným způsobem zobrazena v platném dokumentu, nebo je přinejmenším mlčky respektována účastníky dohody. Nejdůležitějšími jejími dvěma znaky jsou délka časového období, za které je poměřována, a četnost skládání úroků.

Podle prvního uvedeného znaku rozeznáváme roční nominální úrokovou míru, která se značí p.a. (z latinského *per annum*). Oznámení, že úroková sazba peněžního ústavu činí 3 % p.a., znamená, že z každé stokoruny dostaneme na konci roku úrok 3 Kč. Můžeme se dále setkat s úrokovou sazbou pololetní, která se označuje p.s. (*per semestre*), čtvrtletní – p.q. (*per quartale*), měsíční – p.m. (*per mensem*) a denní – p.d. (*per diem*).

Přitom platí, že roční nominální úroková míra:

= 2× pololetní nominální úroková míra;

= 4× čtvrtletní nominální úroková míra;

= 12× měsíční nominální úroková míra;

= 365 (366)× denní nominální úroková míra.

Druhým důležitým znakem je četnost připisování úroků neboli frekvence úročení. Nejčastějším způsobem je roční připisování úroků. Podle tohoto způsobu se úroky k zůstatku bankovního účtu připočítávají tak, že se na konci roku provede výpočet úroků ze zůstatku na účtu a ty se

---

5 Terminologie v této otázce není jednoznačná. Většinou však se pojem úroková sazba používá v případě, jedná-li se o veličinu určenou nějakým subjektem (např. diskontní sazba centrální banky, úroková sazba z termínového vkladu). Pojem úroková míra či míra výnosu, míra zisku se používá, jedná-li se o veličinu vypočítanou z jiných veličin (míra inflace).

potom k němu přičtou. Jestliže bychom tímto způsobem připočítávali úroky nikoli na konci roku, ale na konci každého měsíce, jednalo by se o měsíční připisování úroků. Obdobně mohou být úroky připisovány i pololetně, čtvrtletně, denně atd. V této souvislosti se setkáváme s pojmem **úrokové období,** což je doba, za kterou se úroky pravidelně připisují.

Efektivní úroková míra představuje uměle vypočtenou úrokovou míru, která umožňuje porovnat různé nominální úrokové míry, poměřované sice za stejné období, avšak s různou četností připisování úroků. Tak např. roční efektivní úroková míra nám říká, jak velká roční nominální úroková míra při ročním připisování úroků odpovídá roční nominální úrokové míře při měsíčním, denním či jiném připisování.

Úrokovou míru, kterou budeme používat pro diskontování, resp. akumulování peněžních toků, nazýváme **požadovaná úroková míra** nebo **požadovaná výnosová míra, požadovaná výnosnost.** Poslední dva výrazy se používají zejména v souvislosti s cennými papíry. V podstatě jsou dvě možnosti, jakým způsobem ji můžeme stanovit. Buď nějaké peníze máme, a potom jestliže budeme určitou investici realizovat, budeme něco ztrácet, a to možnost investovat tyto peníze někde jinde, např. je uložit v bance na termínový účet. V tomto případě za požadovanou úrokovou míru dosadíme úrokovou míru z tohoto účtu. Nemusí se však jednat pouze o ztrátu úroků z bankovního vkladu, ale i o ztrátu úroků z dluhopisů nebo ztrátu výnosů z nějaké jiné investice. Takovouto úrokovou míru, která v podstatě představuje ztrátu našich potenciálních výnosů, nazýváme **náklady obětované příležitosti.** Druhá možnost je, že žádné peníze nemáme, a abychom mohli námi plánovanou investici realizovat, musíme si vypůjčit. Za požadovanou úrokovou míru budeme potom dosazovat úrokovou míru z naší půjčky.

Zvláštním druhem úrokové míry je **vnitřní výnosové procento, vnitřní míra výnosu**[6]. V podstatě se jedná o takovou uvažovanou úrokovou míru, při níž se cena investice rovná současné (diskontované) hodnotě budoucích výnosů. V případě dlouhodobých cenných papírů ji označujeme jako **výnosnost do doby splatnosti**[7].

---

6 Z anglického Internal Rate of Return (IRR).

7 z anglického Yield to Maturity (YTM).

Finanční rozhodování se z hlediska délky časového úseku, na který je přijímáno, dělí na krátkodobé a dlouhodobé a v souvislosti s tím je možno též hovořit o možnostech aplikace metody časové hodnoty peněz pomocí dvou typů úročení.

2.2 Typy úročení

Existují dva základní způsoby úročení:

- o **jednoduchém úročení** hovoříme tehdy, jestliže se vyplácené úroky k původnímu kapitálu nepřičítají a dále se neúročí – jinými slovy, úroky se počítají stále z původního kapitálu;
- o **složené úročení** se jedná tehdy, jestliže se úroky připisují k peněžní částce a spolu s ní se dále úročí.

Úročení dělíme též podle toho, kdy dochází k placení úroku. Z tohoto hlediska hovoříme o:

- úročení **polhůtním** neboli **dekurzivním** v případě, že se úroky platí na konci úrokového období;
- úročení **předlhůtním** neboli **anticipativním**, dochází-li k placení úroků na začátku úrokového období.

2.3 Jednoduché úročení polhůtní

U tohoto typu úročení se úročí stále pouze základní částka, vyplácené úroky se k ní nepřičítají, nevznikají tedy úroky z úroků. Úroky jsou vypláceny po uplynutí úrokového období, ke kterému se vztahují. Úrok pak nejčastěji vypočítáme podle vzorce:

$$u = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}, \tag{2-1}$$

kde K je peněžní částka (kapitál);
p je roční úroková sazba v procentech;
t je doba splatnosti kapitálu ve dnech (obvykle $0 < t < 360$);
u úrok.

Jestliže vyjádříme ve vzorci (2-1) úrokovou sazbu jako desetinné číslo a splatnost v letech, dostaneme vzorec pro výpočet úroku ve tvaru:

$$u = K \cdot i \cdot n, \tag{2-2}$$

kde $i = p / 100$ je úroková sazba, vyjádřená jako desetinné číslo (značí úrok z 1 Kč za jeden rok);

$n = t / 360$ je doba splatnosti vyjádřená v letech (obvykle $0 < n < 1$).

Délku roku jsme ve vzorci (2-1) uvedli jako 360 dní. Zastavme se u problému vyjádření doby splatnosti n, což není v zásadě obtížné. Dělíme počet dní existence smluvního vztahu t (dobu splatnosti ve dnech) délkou roku ve dnech. Pro určení tohoto podílu se vyvinulo několik standardů.

Počet dní v čitateli může být uveden podle následujících kódů:

- **ACT** – započítává se skutečný počet dní smluvního vztahu a obvykle se neuvažuje první den;
- **30E** – celé měsíce se započítávají bez ohledu na skutečný počet dní jako 30 dní;
- **30A** – liší se od 30E maximálně o jeden den, který je započten pouze v případě, že konec smluvního vztahu připadne na 31. den v měsíci a současně začátek smluvního vztahu není 30. nebo 31. den v měsíci.

Délka roku ve jmenovateli je uvedena:

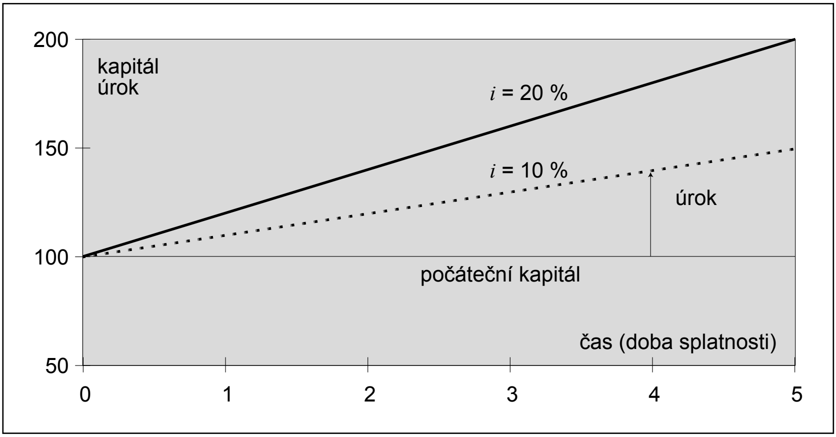
- rok jako 365 dní (resp. 366 v přestupném roce);
- rok jako 360 dní.

Kombinací uvedených možností dostáváme různé standardy pro stanovení doby splatnosti. V praxi nejužívanější kombinace jsou:

- standard **ACT/365 (anglická metoda)** je založen na skutečném počtu dní úrokového období (čitatel) a délce roku 365 (resp. 366) dní;
- standard **ACT/360 (francouzská či mezinárodní metoda)** je založen opět na skutečném počtu dní v čitateli zlomku, ale délka roku (ve jmenovateli) se započítává jako 360 dní;
- standard **30E/360 (německá či obchodní metoda)** je založen na kombinaci započítávání celých měsíců jako 30 dní (v čitateli) a délky roku (ve jmenovateli) jako 360 dní.

V uváděných příkladech budeme nejčastěji využívat standard 30E/360 (zejména pro jednoduchost).

Schematicky je výše úroku v závislosti na době splatnosti vyjádřena na obr. 2.1.



Obrázek 2.1 Závislost úroku na době splatnosti kapitálu

Z obrázku i z uvedených vzorců je zřejmé, že velikost úroku závisí nejen na úrokové sazbě a na výši kapitálu, ale též na době splatnosti. Úrok (resp. konečný, zúročený kapitál) je při dané úrokové sazbě lineární funkcí času.

Někdy se setkáme i s výpočtem úroků pomocí tzv. **úrokových čísel** a **úrokových dělitelů.**

Úrokové číslo (UC) je definováno jako:

$$UC = \frac{K \cdot t}{100}. \tag{2-3}$$

Úrokový dělitel (UD) je definován jako:

$$UD = \frac{360}{p}. \tag{2-4}$$

Úrokový dělitel značí, za kolik dní činí úrok ze 100 Kč 1 Kč.

Setkat se můžeme i s obráceným číslem (p / 360), a potom hovoříme o úrokovém násobiteli.

Pomocí výše uvedených vztahů je možno vzorec pro výpočet úroku zapsat ve tvaru:

$$u = \frac{UC}{UD}. \tag{2-5}$$

Tento vzorec se hodí pro výpočet úroků z měnící se výše kapitálu během úrokového období při neměnné výši úrokové sazby.

Jestliže částka K_1 je uložena, a tedy úročena t_1 dní, částka K_2 je uložena a úročena t_2 dní, …, částka $K_r t_r$ dní, a přitom všechny při stejné úrokové sazbě p, pak úroková čísla jsou podle vztahu (2-3):

$$UC_1 = \frac{K_1 \cdot t_1}{100}, UC_2 = \frac{K_2 \cdot t_2}{100}, \ldots, UC_r = \frac{K_r \cdot t_r}{100}.$$

Úrokový dělitel se nemění a je roven $UD = 360 / p$. Úrok pak vypočítáme jako součet úroků za jednotlivá období, které vypočteme podle vzorce (2-5). Vzhledem k tomu, že úrokový dělitel se nemění, můžeme jej vytknout a vzorec pro výpočet celkového úroku můžeme vyjádřit jako:

$$u = \frac{\sum_{j=1}^{r} UC_j}{UD}. \tag{2-6}$$

Tohoto způsobu se využívá například při výpočtu úroků na běžných účtech.

Příklad 2-1 *Výpočet úroku při jednoduchém úročení*

Jaké jsou úrokové náklady úvěru ve výši 200 000 Kč, jednorázově splatného za osm měsíců (240 dní) včetně úroku, je-li úroková sazba 9 % p.a.?

<u>*Řešení*</u>

Za jednotlivé veličiny dosadíme následující hodnoty:

K = 200 000;
p = 9;

i = 9 / 100 = 0,09;
t = 240;
n = 8 · 30 / 360 = 8 / 12 = 2 / 3.

Pro výpočet úroku u využijeme vztah (2-1):

$$u = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360} = \frac{200\,000 \cdot 9 \cdot 240}{100 \cdot 360} = 12\,000$$

nebo vztah (2-2):

$$u = K \cdot i \cdot n = 200\,000 \cdot 0{,}09 \cdot 2/3 = 12\,000.$$

Úrokové náklady činí 12 000 Kč.

Příklad 2-2 *Výpočet úroku podle různých standardů*

Vypočítejte velikost úroků pro vklady ve výši 100 000 Kč, uložené při úrokové sazbě 2 % p.a. na dobu uvedenou v tabulce podle standardů ACT/365, ACT/360, 30E/360.

Vklad v Kč	Úroková sazba	Den vkladu	Den výběru
100 000	2 %	15. 1. 2013	7. 9. 2013
100 000	2 %	11. 1. 2013	4. 3. 2013
100 000	2 %	15. 11. 2012	1. 3. 2013

Řešení

Pro výpočet úroku využijeme vztah (2-2):

$$u = K \cdot i \cdot n.$$

Dosadíme K = 100 000, i = 0,02.

Za n dosadíme hodnoty podle níže uvedené tabulky.

Datum		Počet dní		Doba uložení n jako zlomek roku			Úrok podle standardů		
vkladu	výběru	ACT	30E	ACT/360	ACT/365	30E/360	ACT/360	ACT/365	30E/360
15. 1. 2013	7. 9. 2013	235	232	0,653	0,644	0,644	1 305,56	1 287,67	1 288,89
11. 1. 2013	4. 3. 2013	52	53	0,144	0,142	0,147	288,89	284,93	294,44
15. 11. 2012	1. 3. 2013	106	106	0,294	0,290	0,294	588,89	580,82	588,89

Z uvedeného příkladu vidíme, že nelze jednoznačně říci, který standard je pro výpočet úroku nejvýhodnější.

V každém případě platí, že počítáme-li úrok pomocí standardu ACT/360, bude výsledek při jinak stejných podmínkách vyšší než při použití standardu ACT/365, což vidíme v každém řádku tabulky. Řádky tabulky se liší dobou uložení kapitálu.

Srovnáme-li výpočet úroku pomocí standardu ACT/360 a standardu 30E/360, můžeme říci, že záleží na období, v kterém je vklad uložen. Je-li uložen po krátkou dobu, jejíž částí je měsíc únor, je úrok počítaný pomocí standardu 30E/360 vyšší než úrok počítaný podle standardu ACT/360 (viz řádek 2 tabulky).

Ve třetím řádku vidíme, že výše úroku může být při výpočtu podle standardů 30E/360 i ACT/360 stejná.

Příklad 2-3 *Výpočet penále z faktury*

Odběratel vám nezaplatil fakturu, znějící na částku 193 000 Kč, splatnou 7. července 2013. Podle smlouvy účtujete penále ve výši 0,05 % z fakturované částky za každý den prodlení. Jak velké bude penále k 9. září 2013?

Řešení

Penále vypočítáme jako úrok za období od 7. 7. 2013 do 9. 9. 2013.

Dosadíme: K = 193 000, i_{pd} = 0,0005 p.d. (denní úroková sazba), t = 64, resp. 62 podle toho, zda počítáme skutečný počet dní (ACT) nebo počet dní metodou 30E.

Dobu splatnosti v tomto případě vyjadřujeme ve dnech, protože úroková sazba je též denní.

Úrok vypočítáme podle vztahu (2-2), kde roční úrokovou sazbu i nahradíme denní úrokovou sazbou i_{pd} a dobu splatnosti n, vyjádřenou v letech, nahradíme dobou splatnosti t, vyjádřenou ve dnech:

$$u = K \cdot i_{pd} \cdot t = 193\,000 \cdot 0{,}0005 \cdot 64 = 6\,176,$$

resp.:

$$u = K \cdot i_{pd} \cdot t = 193\,000 \cdot 0{,}0005 \cdot 62 = 5\,983.$$

Celkem bude fakturováno penále ve výši 6 176 Kč v případě, že počet dní prodlení je počítán jako skutečný. Tento způsob je výhodnější pro dodavatele.

Pro odběratele je výhodnější dobu rozhodnou pro výpočet penále počítat metodou 30E, neboť zaplatí penále pouze 5 983 Kč.

2.4 Základní rovnice pro jednoduché polhůtní úročení

Vedle případů, kdy počítáme výši úroku za určité období, jsou časté případy, kdy zjišťujeme výši zúročeného kapitálu (kapitálu včetně úroků) po určitém období. Konečnou, zúročenou výši kapitálu (K_n) za období n dostaneme jako součet počátečního kapitálu (K_0) a úroků za toto období.

V metodě časové hodnoty peněz hovoříme o zúročeném kapitálu K_n jako o budoucí hodnotě kapitálu a o počátečním kapitálu K_0 jako o současné hodnotě kapitálu.

Vztah zúročeného kapitálu a počátečního kapitálu je proto vztah současné a budoucí hodnoty kapitálu.

Tedy:

$$K_n = K_0 + u.$$

Dosadíme-li do tohoto výrazu ze vztahu (2-2), dostaneme:

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot i \cdot n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n), \qquad \textbf{(2-7)}$$

kde K_0 je počáteční peněžní částka (kapitál), současná hodnota kapitálu;
$i = p / 100$ je roční úroková sazba vyjádřená jako desetinné číslo;
$n = t / 360$ je doba splatnosti kapitálu v letech;
K_n je stav kapitálu za dobu n, budoucí hodnota kapitálu;
u je úrok.

Příklad 2-4 *Výpočet stavu vkladu za dané období*

Jaký je stav vkladu 1 420 000 Kč za sedm měsíců (210 dnů) při úrokové sazbě 1,5 % p.a.?

Řešení

Dosadíme: K_0 = 1 420 000; i = 0,015; n = 210 / 360 = 7 / 12.

Podle vztahu (2-7) vypočítáme stav vkladu za dané období jako:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n) = 1\,420\,000 \cdot (1 + 0{,}015 \cdot 7/12) = 1\,432\,425.$$

Původní vklad vzroste na 1 432 425 Kč.

Ze základní rovnice pro jednoduché polhůtní úročení můžeme vypočítat kteroukoli z uvedených veličin.

Počáteční (základní) kapitál můžeme vyjádřit jako:

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + i \cdot n} = \frac{u}{i \cdot n}, \qquad \textbf{(2-8)}$$

kde K_0 je počáteční peněžní částka (kapitál), současná hodnota kapitálu;
$i = p / 100$ je roční úroková sazba, vyjádřená jako desetinné číslo;
$n = t / 360$ je doba splatnosti kapitálu v letech;
K_n je stav kapitálu za dobu n, budoucí hodnota kapitálu;
u je úrok.

Doba splatnosti (úročení) je dána výrazem:

$$n = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot i} = \frac{u}{K_0 \cdot i}. \qquad \textbf{(2-9)}$$

Úrokovou sazbu (výnosnost, míru výnosu) vyjádříme:

$$i = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot n} = \frac{u}{K_0 \cdot n}. \qquad \textbf{(2-10)}$$

Pokud je i nezávisle proměnná pevně daná, nazývá se zpravidla úroková sazba.

Pokud se jedná o závisle proměnnou nebo nezávisle proměnnou, která však může být volitelná, hovoříme většinou o **výnosnosti** nebo o míře výnosu. Z matematického hlediska jsou však vzorce pro výpočet stejné.

Příklad 2-5 *Výpočet původní výše kapitálu*

Jak velký počáteční vklad vzroste při 2% úrokové sazbě p.a. od 12. 4. do 24. 6. o 1 500 Kč?

Řešení

Za jednotlivé veličiny dosadíme dle zadání: $i = p / 100 = 0{,}02$; $u = 1\,500$; $n = t / 360 = 72 / 360$ (počet dní jsme získali podle standardu 30E/360).

Podle vztahu (2-8) vypočítáme K_0:

$$K_0 = \frac{u}{i \cdot n} = \frac{1\,500}{0{,}02 \cdot 72/360} = 375\,000.$$

Původní výše vkladu byla 375 000 Kč.

Příklad 2-6 *Výpočet doby splatnosti při jednoduchém úročení*

Po jakou dobu byl uložen vklad ve výši 3 960 Kč, jestliže vzrostl při úrokové sazbě 2 % p.a. připsáním úroků na konci období na 4 000 Kč?

Řešení

Dosadíme: $K_0 = 3\,960$; $K_n = 4\,000$; $i = 0{,}02$. Vypočítáme dobu splatnosti n (v letech) a t (ve dnech). Využijeme vztah (2-9):

$$n = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot i} = \frac{4\,000 - 3\,960}{3\,960 \cdot 0{,}02} = 0{,}505,$$

$$t = n \cdot 360 = 0{,}505 \cdot 360 = 182.$$

Úrok byl připsán za 182 dní.

Příklad 2-7 *Výpočet úrokové sazby*

Při jaké úrokové sazbě (při jaké míře výnosu) bude činit úrok z vkladu 100 000 Kč za sedm měsíců 1 500 Kč?

Řešení

Dosadíme za jednotlivé veličiny: u = 1 500; n = 7 / 12; K_0 = 100 000. Podle vztahu (2-10) vypočítáme úrokovou sazbu i:

$$i = \frac{u}{K_0 \cdot n} = \frac{1\,500}{100\,000 \cdot 7/12} = 0{,}0257.$$

Úroková sazba je 2,57 %.

Příklad 2-8 *Výpočet počáteční výše úvěru při jednoduchém úročení*

Jakou sumu se splatností čtyři měsíce si můžeme půjčit, máme-li možnost po této době použít na splacení úvěru a úroků 100 000 Kč? Úroková sazba činí 7 % p.a.

Řešení

Použijeme vztah (2-8). Dosadíme K_n = 100 000; i = 0,07; n = 4 / 12. Vypočítáme současnou hodnotu K_0:

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + i \cdot n} = \frac{100\,000}{1 + 0{,}07 \cdot 4/12} = 97\,719{,}87.$$

Můžeme si půjčit maximálně 97 719 Kč.

2.5 Současná a budoucí hodnota při jednoduchém úročení

Velmi často se v bankovnictví a v ekonomii vůbec můžeme setkat s tím, že potřebujete navzájem porovnat dvě částky v čase. Např. při rozhodování, zda platit v hotovosti či zda využít možnosti úvěru, a platit tedy v budoucnosti. Srovnání částek bez ohledu na čas není přesné, protože peníze v čase mají různou hodnotu: čím dříve peníze budeme mít, tím dříve je můžeme investovat, a ponesou nám tedy úrok. A naopak. K tomu, abychom mohli porovnávat peníze v čase, potřebujeme znát pojem současná hodnota, jehož použití je v metodě časové hodnoty peněz velmi časté.

Současnou hodnotou rozumíme částku, která, bude-li úročena v časovém období, přinese **budoucí hodnotu.**

Označíme-li jako K_0 současnou hodnotu;
K_n budoucí hodnotu;
i úrokovou sazbu vyjádřenou jako desetinné číslo;
n úrokovou dobu v letech;

pak symbolicky vyjádříme současnou hodnotu vztahem (2-8):

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + i \cdot n}.$$

Výpočet současné hodnoty z hodnoty budoucí se nazývá též **diskontování.**

Příklad 2-9 *Rozhodování o investičních variantách pomocí metody časové hodnoty peněz*

Co je pro nás výhodnější při koupi daru: dát za něj nyní hotově 48 500 Kč, nebo zaplatit za rok 51 000 Kč? Uvedenou hotovost máme možnost investovat při úrokové míře 4,2 % p.a.

Řešení

V tomto případě je možno postupovat třemi způsoby.

První způsob využívá metody současné hodnoty. Potřebujeme zjistit současnou hodnotu 51 000 Kč při úrokové sazbě 4,2 % a porovnat ji s částkou 48 500 Kč. Dosadíme tedy: K_n = 51 000; i = 0,042; n = 1 a vypočítáme K_0. Podle vztahu (2-8) platí:

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + i \cdot n} = \frac{51\,000}{1{,}042} = 48\,944{,}34.$$

Současná hodnota je větší než 48 500 Kč, tedy zaplatíme-li za rok 51 000 Kč, je to ekvivalentní současné platbě 48 944,34 Kč. Proto je v tomto případě výhodnější první možnost, tedy platit hned v hotovosti částku 48 500 Kč.

Druhý způsob využívá metody budoucí hodnoty. Potřebujeme zjistit budoucí hodnotu částky 48 500 Kč při úrokové sazbě 4,2 % za rok a porovnat ji s částkou 51 000 Kč. V tomto případě K_0 = 48 500; i = 0,042; n = 1. Podle vztahu (2-7) dostaneme budoucí hodnotu K_n:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n) = 48\,500 \cdot (1 + 0{,}042 \cdot 1) = 50\,537.$$

Uložíme-li nyní částku 48 500 Kč, získáme za rok částku 50 537 Kč, což je méně, než budeme za rok potřebovat. Proto je výhodnější první možnost, tedy zaplatit hned částku 48 500 Kč.

Třetí způsob využívá výpočtu míry výnosu. Vypočteme, jaká by byla míra výnosu, jestliže nyní bychom investovali 48 500 Kč a za rok by se tato částka zhodnotila na 51 000 Kč. Využijeme vztah (2-10), kde dosadíme K_0 = 48 500; K_n = 51 000; n = 1:

$$i = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot n} = \frac{51\,000 - 48\,500}{48\,500 \cdot 1} = 0{,}0515.$$

Z vypočteného výsledku je vidět, že bychom museli reinvestovat částku 48 500 Kč při úrokové sazbě 5,15 %, aby se za rok zhodnotila na 51 000 Kč. Naše úroková míra je však nižší než 5,15 %, proto je výhodnější první možnost, tedy zaplatit 48 500 Kč okamžitě.

Vidíme, že všechny tři postupy vedou ke kvalitativně stejnému výsledku.

2.6 Diskont

O diskontu (obchodním neboli bankovním) hovoříme zejména v souvislosti s eskontem směnek (viz kapitola 7). Převezme-li banka nějakou pohledávku před dobou splatnosti této pohledávky, nevyplatí celou výši pohledávky, ale jistou část si ponechá jako náhradu předem. Při obchodování s krátkodobými cennými papíry s jmenovitou (nominální) hodnotou jako hodnotou budoucí se bez diskontu neobejdeme.

Diskont je tedy odměna ode dne výplaty do dne splatnosti pohledávky. Počítá se podle vzorce pro jednoduché úročení z jmenovité (nominální) hodnoty pohledávky a na základě příslušné diskontní sazby[8].

Označíme-li jako D_{ob} obchodní diskont[9];
K_n nominální hodnotu pohledávky, která je splatná za dobu n;

---

[8] Jedná se zde o sazbu, která je používána při eskontu směnek či jiných pohledávek pro výpočet diskontu. Nelze ji zaměňovat s diskontní sazbou centrální banky.

[9] Můžeme se též setkat s pojmem matematický diskont. Ten je počítán ze současné hodnoty pohledávky, tedy je číselně stejný jako jednoduchý polhůtní úrok.

d diskontní sazbu jako desetinné číslo, p.a.;
n čas od doby výplaty do doby splatnosti pohledávky v letech;

pak obchodní diskont vyjádříme vztahem:

$$D_{ob} = K_n \cdot d \cdot n. \qquad \textbf{(2-11)}$$

Po srážce obchodního diskontu bude tedy vyplacena částka:

$$K_{ob} = K_n - D_{ob} = K_n - K_n \cdot d \cdot n,$$

tedy:

$$K_{ob} = K_n \cdot (1 - d \cdot n). \qquad \textbf{(2-12)}$$

Příklad 2-10 *Vyplacená částka při eskontu směnky*

Vypočítejte, kolik dostane vyplaceno klient, jemuž banka eskontuje směnku o nominální hodnotě 1 000 000 Kč 35 dní před dobou splatnosti při diskontní sazbě 4 % p.a. Předpokládáme, že banka neúčtuje žádné další provize.

Řešení

Pro řešení použijeme vzorce (2-12) a za jednotlivé veličiny dosadíme:

K_n = 1 000 000; n = 35 / 360; d = 0,04. Potom:

$$K_{ob} = K_n \cdot (1 - d \cdot n) = 1\,000\,000 \cdot (1 - 0{,}04 \cdot 35/360) = 996\,111{,}11.$$

Klient dostane vyplaceno 996 111,11 Kč.

Vzhledem k tomu, že princip diskontu je shodný s placením úroku na počátku období, jedná se vlastně o **předlhůtní úročení.**

2.7 Vztah mezi polhůtní úrokovou sazbou a diskontní sazbou

Vztah mezi diskontní sazbou a polhůtní úrokovou sazbou odvodíme pomocí postupu, založeného na vztahu současné a budoucí hodnoty.

Při použití diskontu je:

současná hodnota: $K_{ob} = K_n \cdot (1 - d \cdot n)$,

budoucí hodnota: $K_n = \dfrac{K_{ob}}{1 - d \cdot n}$.

Při použití jednoduchého polhůtního úročení je:

současná hodnota: $K_0 = \dfrac{K_n}{1 + i \cdot n}$,

budoucí hodnota: $K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$.

Rovnají-li se současné hodnoty, tedy K_{ob} a K_0, platí:

$$K_n \cdot (1 - d \cdot n) = \frac{K_n}{1 + i \cdot n}.$$

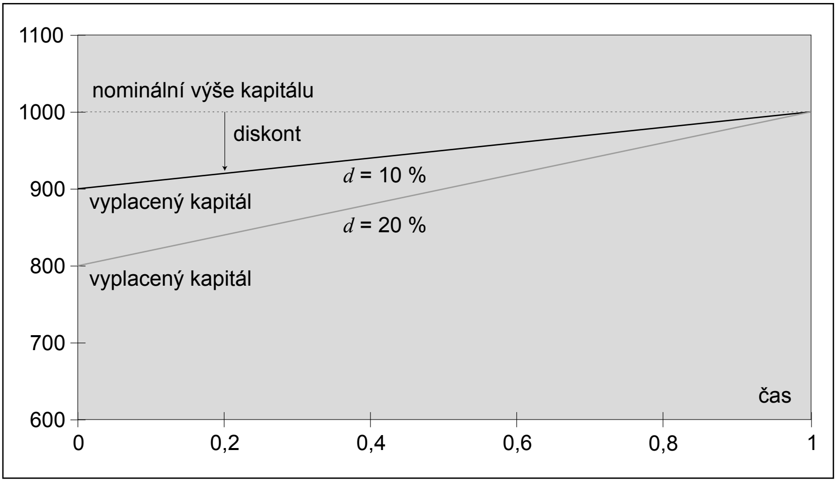
Po aritmetických úpravách dostaneme vztah:

$$i = \frac{d}{1 - d \cdot n}. \qquad \textbf{(2-13)}$$

Vyjádříme-li ze vztahu (2-13) diskontní sazbu d, dostaneme:

$$d = \frac{i}{1 + i \cdot n}. \qquad \textbf{(2-14)}$$

Graficky je princip diskontu znázorněn na obr. 2.2.



Obrázek 2.2 Závislost výše kapitálu na čase

Z grafu vidíme, že v případě půjčky založené na obchodním diskontu dostaneme vyplacenu částku sníženou o diskont, přičemž doba rozhodná pro výpočet diskontu je doba od výplaty do splatnosti pohledávky.

Příklad 2-11 *Porovnání diskontní sazby a polhůtní úrokové sazby*

Uvažujme dvě půjčky se stejnou splatnou částkou.

1. První je založena na eskontu směnky splatné za půl roku o nominální hodnotě 1 000 000 Kč s roční diskontní sazbou 4 %.
2. Druhá je založena na jednoduchém úročení s roční úrokovou sazbou 4 %, přičemž za půl roku se musí splatit 1 000 000 Kč.

Která varianta je výhodnější pro dlužníka?

Která varianta zaručí věřiteli (bance) vyšší zisk?

<u>*Řešení*</u>

Je třeba vypočítat, jaký obnos bude v každé z variant vyplacen dlužníkovi.

1. Obchodní diskont

Nyní vypočítáme vyplacenou částku po srážce obchodního diskontu. Podle vzorce (2-12) dosadíme za jednotlivé veličiny:

K_1 = 1 000 000; d = 0,04; n = 0,5;

$$K_{ob} = K_n \cdot (1 - d \cdot n) = 1\,000\,000 \cdot (1 - 0{,}04 \cdot 0{,}5) = 980\,000.$$

Při půjčce založené na obchodním diskontu bude vyplaceno 980 000 Kč.

2. Polhůtní úročení

Musíme zjistit současnou hodnotu splatné částky půjčky, která bude mít hodnotu 1 000 000 Kč za půl roku. Podle vzorce (2-8) dosadíme K_1 = 1 000 000; i = 0,04; n = 0,5 a vypočítáme současnou hodnotu K_0.

Platí:

$$K_0 = \frac{K_1}{1 + i \cdot n} = \frac{1\,000\,000}{1 + 0{,}04 \cdot 0{,}5} = 980\,392{,}16.$$

V době splatnosti je třeba v obou případech zaplatit celkem 1 000 000 Kč, ale na počátku dostaneme vyplacenu vyšší částku při polhůtním úročení než při úvěru, který je založen na bázi obchodního diskontu. Pro dlužníka je výhodnější druhá varianta.

Půjčka založená na bázi obchodního diskontu je při stejné úrokové sazbě výhodná pro věřitele.

Aby obě varianty byly ekvivalentní z hlediska věřitele, tedy aby výnos byl pro věřitele stejný při úvěru založeném na polhůtním úročení jako při úvěru založeném na obchodním diskontu, musí polhůtní úroková sazba být podle vztahu (2-13) o něco vyšší než úroková sazba předlhůtní.

V našem příkladu:

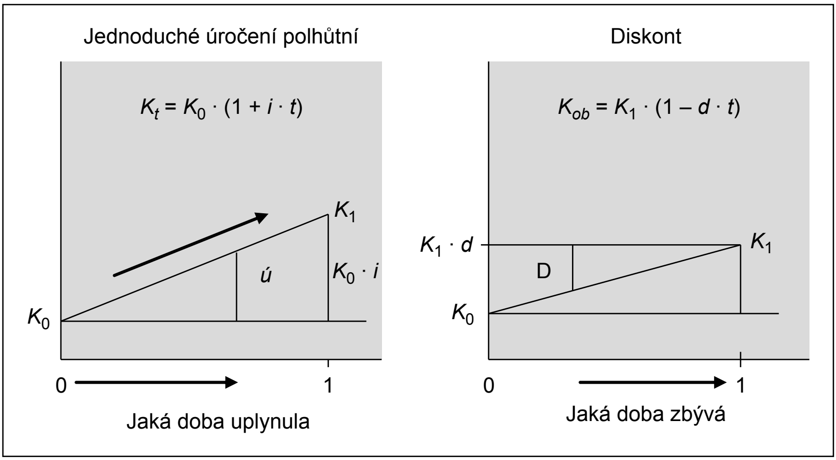
$$i = \frac{d}{1 - d \cdot n} = \frac{0{,}04}{1 - 0{,}04 \cdot 1/2} = 0{,}0408.$$

Je-li polhůtní úroková sazba 4,08 %, přinesou obě varianty věřiteli (banče) stejný zisk.

Graficky je možné princip půjčky založené na polhůtním úročení a půjčky založené na obchodním diskontu (tedy např. odkupem směnky) znázornit pomocí níže uvedeného obrázku.

Pro výpočet úroku je rozhodující doba, která uplynula od poskytnutí půjčky do její splatnosti. Úrok se počítá z částky, která byla dlužníkovi věřitelem poskytnuta a platí se při splatnosti půjčky.

Pro výpočet diskontu je rozhodující doba, která zbývá od eskontu směnky do její splatnosti. Diskont se počítá ze splatné částky, tedy z částky, která bude uhrazena v době splatnosti půjčky a platí se v době eskontu směnky, tedy v době poskytnutí úvěru.



Obrázek 2.3 Princip půjčky založené na polhůtním úročení a půjčky založené na obchodním diskontu

Příklad 2-12 *Porovnání diskontní a polhůtní úrokové sazby*

Potřebujeme získat od banky úvěr na jeden rok. Banka nabízí dvě možnosti zaplacení úvěru:

1. úroková sazba 5,8 % p.a. při splatnosti úroku v době splatnosti úvěru;
2. odkup směnky, kterou vlastníme a je splatná za rok při diskontní sazbě 5,5 % p.a. Úrok (diskont) je tedy splatný při poskytnutí úvěru.

Která z variant je pro nás úrokově výhodnější?

Řešení

V tomto případě se jedná o srovnání principu diskontu (předlhůtního úročení) a polhůtního úročení. Pro rozhodnutí, kterou variantu zvolit, je možné použít dva způsoby, které vedou ke shodnému výsledku.

Jednak můžeme využít vztah (2-13) a vypočítat k předlhůtní úrokové sazbě ekvivalentní úrokovou sazbu polhůtní, tj. úrokovou sazbu polhůtní, která zajistí stejné podmínky, jako při úročení předlhůtním. Vypočítanou úrokovou sazbu pak porovnáme s danou polhůtní úrokovou sazbou. Tedy:

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{0,055}{1-0,055} = 0,0582 = 5,82\ \%.$$

Z výpočtu je patrné, že nabízená polhůtní úroková sazba je nižší než vypočtená úroková sazba, ekvivalentní úrokové sazbě předlhůtní. Pro poskytnutí úvěru je výhodnější první varianta.

Druhý způsob výpočtu vychází ze vztahu (2-14), podle něhož vypočteme k dané polhůtní úrokové sazbě předlhůtní úrokovou sazbu, kterou pak srovnáme s danou předlhůtní úrokovou sazbou. Tedy:

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0,058}{1+0,058} = 0,0548 = 5,48\ \%.$$

I podle druhého způsobu je zřejmé, že se rozhodneme pro první variantu, neboť k tomu, aby obě možnosti byly stejně výhodné, by předlhůtní úroková sazba musela být 5,48 %. Nabízená předlhůtní úroková sazba je vyšší, tedy i zde jsme dospěli k tomu, že druhá varianta je pro nás méně výhodná.

Dalšími diskontovanými cennými papíry jsou pokladniční poukázky. Jsou to krátkodobé dluhové cenné papíry, jejichž doba splatnosti je maximálně dvanáct měsíců a jsou emitovány obvykle státem (státní pokladniční poukázky – SPP). Jejich jmenovitá hodnota je 1 000 000 Kč.

Jsou vydávány v zaknihované podobě a znějí na doručitele. Emisní cena je stanovena buď emitentem, nebo na základě aukce americké nebo holandské. Cena je jako u všech diskontovaných cenných papírů nižší než jmenovitá hodnota a v době splatnosti získává investor jmenovitou hodnotu sníženou o daň z výnosu, která je stanovena na základě právních předpisů. Výnos se vypočítá jako rozdíl mezi jmenovitou hodnotou a emisní cenou.

Jsou obchodovány na bázi konvence ACT/360. Nejsou veřejně obchodovatelné, jsou však převoditelné na základě pravidel systému SKD (systém krátkodobých dluhopisů).

Příklad 2-13 *Výnosnost pokladniční poukázky*

Dne 6. 8. 2009 se konala holandská aukce státních pokladničních poukázek o jmenovité hodnotě 1 000 000 Kč.

Den emise	**Den splatnosti**	**Objem aukce**	**Požadováno**	**Průměrná cena**
7. 8. 2009	5. 2. 2010	6 mld. Kč	8,3 mld. Kč	991 876,5 Kč

a) Jaká je roční výnosnost této pokladniční poukázky?

b) Porovnejme roční výnosnost uvedené pokladniční poukázky emitované v roce 2009 s roční výnosností pokladniční poukázky emitované v červenci roku 2013, která má stejnou dobu splatnosti.

Datum emise	**Den splatnosti**	**Objem emise**	**Požadováno v aukci**	**Průměrná cena**
19. 7. 2013	17. 1. 2014	8 mld. Kč	14,2 mld. Kč	999 444,2 Kč

Řešení

a) Pro výpočet výnosnosti využijeme vztah (2-10), do kterého dosadíme z výše uvedené tabulky: K_n = 1 000 000, tj. jmenovitá hodnota pokladniční poukázky – budoucí hodnota kapitálu; K_0 = 991 876,5, tj. cena, za kterou byla pokladniční poukázka v aukci prodána – současná hodnota kapitálu; n = 182 / 360 je doba splatnosti pokladniční poukázky, která je určena na základě konvence ACT/360, tedy skutečný počet dní se dělí délkou roku 360 dní.

$$i = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot n} = \frac{1\,000\,000 - 991\,876{,}5}{991\,876{,}5 \cdot 182/360} = 0{,}0162.$$

Míra výnosu dané pokladniční poukázky činí 1,62 %. V tomto případě se jedná o tzv. hrubou výnosnost nebo hrubou míru výnosu (viz oddíl 3.11).

b) Pro výpočet výnosnosti pokladniční poukázky emitované v roce 2013 využijeme opět vztah (2-10) a dosadíme $K_n = 1\,000\,000$, $K_0 = 999\,444{,}2$, $n = 182 / 360$.

Dosazením do vzorce

$$i = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot n} = \frac{1\,000\,000 - 999\,444{,}2}{999\,444{,}2 \cdot 182/360} = 0{,}0011.$$

Míra výnosu pokladniční poukázky emitované v červenci 2013 byla 0,11 %.

Porovnání výnosností obou pokladničních poukázek koresponduje se snížením úrokových sazeb v posledních letech a trvale jejich dlouhodobější nízkou úrovní.

3. Složené úročení

Naše dosavadní výpočty vycházely z toho, že úroky narůstají lineárně, neboli počítají se stále ze stejného základu. Nezapočítávají se úroky z úroků.

Složené úročení vychází z toho, že vyplacené úroky se připočítávají k původnímu kapitálu a v následujícím úrokovém období se jako základ pro výpočet úroku bere již hodnota kapitálu zvýšená o úrok. Úročí se tedy již zúročený kapitál. Složené úročení je možno stejně jako jednoduché rozdělit podle toho, kdy se platí úrok, na složené úročení předlhůtní a polhůtní. Vzhledem k tomu, že nejsou známy aplikace složeného předlhůtního úročení, nebudeme se jím zabývat.

3.1 Základní rovnice pro složené úročení polhůtní

Předpokládejme nyní, že:

1. úrokové období je roční, to znamená, že úroky jsou pravidelně připisovány vždy na konci roku;
2. doba splatnosti kapitálu je celé kladné číslo, to znamená v souladu s předpokladem 1, že kapitál je uložen po dobu n let.

Způsob, jak při složeném úročení můžeme vypočítat stav kapitálu ke konci jednotlivých let, ilustruje tabulka 3.1.

Rok	Stav kapitálu na konci roku	
1	$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i$	$= K_0 \cdot (1 + i)$
2	$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1 \cdot (1 + i)$	$= K_0 \cdot (1 + i)^2$
3	$K_3 = K_2 + K_2 \cdot i = K_2 \cdot (1 + i)$	$= K_0 \cdot (1 + i)^3$
:	:	:
n	$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot i = K_{n-1} \cdot (1 + i)$	$= K_0 \cdot (1 + \mathrm{i})^n$

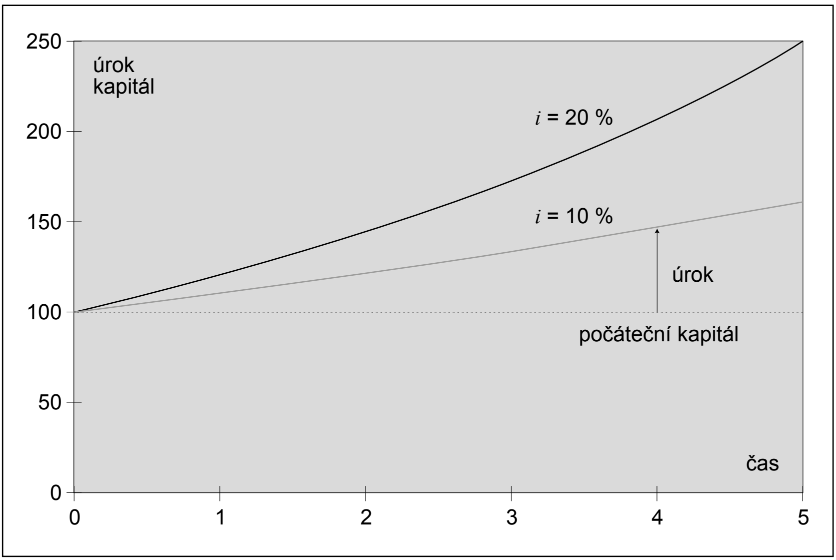
Tabulka 3.1 Princip složeného úročení

kde K_0 je původní kapitál;
i je úroková sazba vyjádřená jako desetinné číslo;
n je doba splatnosti kapitálu v letech;
$K_1 \ldots K_n$ je výše kapitálu na konci 1 … n-tého roku.

Stavy kapitálu na konci jednotlivých let tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem rovným faktoru $1 + i$. Faktor $(1 + i)$ se nazývá **úrokovací faktor** (úročitel). Udává, na kolik vzroste jednotkový vklad za rok při úrokové sazbě i.

Celkový úrokový výnos neroste jako u jednoduchého úročení lineárně, ale exponenciálně.

Závislost výše úroku (resp. zúročeného kapitálu) na době splatnosti u složeného úročení je graficky znázorněna na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1 Závislost úroku a výše kapitálu na době splatnosti

Z tabulky 3.1 vyplývá, že obecně můžeme základní rovnici pro složené úročení napsat ve tvaru:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n, \tag{3-1}$$

kde K_n je budoucí hodnota kapitálu (zúročený kapitál);
K_0 je současná (počáteční hodnota) kapitálu;
n je doba splatnosti (úroková doba);
i je roční úroková sazba.

Úročitel $(1 + i)^n$ udává, na kolik vzroste vklad 1 Kč za dobu n při úrokové sazbě i.

Příklad 3-1 *Budoucí hodnota kapitálu při ročním připisování úroků*

Uložili jsme částku 120 000 Kč. Jaká bude výše kapitálu za tři roky při složeném úročení polhůtním, jestliže úrokové období je roční a úroková sazba činí 1,5 % p.a.?

Řešení

Jedná se o výpočet budoucí hodnoty kapitálu K_n. Podle vztahu (3-1) a po dosazení K_0 = 120 000; i = 0,015; n = 3 platí:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = 120\,000 \cdot (1{,}015)^3 = 125\,481{,}405.$$

Stav kapitálu po třech letech bude 125 481,41 Kč.

V praxi se často setkáme s případy, že úrokové období je kratší než jeden rok. Jinými slovy, výplata nebo připisování úroků probíhá častěji než jedenkrát za rok. To znamená, že úrokové období již není roční, ale například pololetní, čtvrtletní či měsíční. Tím zobecníme předchozí úvahy, kde jsme předpokládali roční úrokové období.

Přepokládejme, že k připisování úroků dochází m-krát do roka. Jaký bude tedy stav kapitálu na konci prvního roku?

Postup výpočtu stavu kapitálu v rámci jednoho roku ukazuje tabulka 3.2.

Rok	Stav kapitálu na konci roku	
1	$K_{1/m} = K_0 + K_0 \cdot \frac{i}{m}$	$= K_0 \cdot (1+\frac{i}{m})$
2	$K_{2/m} = K_{1/m} + K_{1/m} \cdot \frac{i}{m} = K_{1/m} \cdot (1+\frac{i}{m})$	$= K_0 \cdot (1+\frac{i}{m})^2$

Tabulka 3.2 Postup výpočtu stavu kapitálu v rámci jednoho roku

3	$K_{3/m} = K_{2/m} + K_{2/m} \cdot \frac{i}{m} = K_{2/m} \cdot (1 + \frac{i}{m})$	$= K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^3$
:	:	:
n	$K_{m/m} = K_{m-1/m} + K_{m-1/m} \cdot \frac{i}{m} = K_{m-1/m} \cdot (1 + \frac{i}{m})$	$= K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^m$

Tabulka 3.2 Pokračování

kde K_0 je původní kapitál;
i je roční úroková sazba;
i / m je úroková sazba za 1 m-tinu roku;
$K_{1/m} \dots K_{m/m}$ je stav kapitálu na konci 1 … m-té části roku ($K_{m/m} = K_1$);
m je četnost připisování úroků, frekvence úročení, počet úrokových období za rok.

Velikost kapitálu na konci m-té části roku $K_{m/m}$ je rovna kapitálu na konci roku $K_{1.}$

Ze vzorce (3-1) a z výše uvedené úvahy plyne, že stav kapitálu za n let, připisujeme-li úrok m-krát do roka, bude dán vzorcem:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^{m \cdot n}. \qquad \textbf{(3-2)}$$

Příklad 3-2 *Budoucí hodnota kapitálu při pololetním připisování úroků*

Uložili jsme částku 120 000 Kč. Jaká bude konečná výše vkladu za tři roky při složeném úročení polhůtním, jestliže úrokové období je pololetní a roční úroková sazba činí 1,5 % p.a.?

Řešení

Za jednotlivé veličiny dosadíme K_0 = 120 000; i = 0,015; n = 3; m = 2. Podle vztahu (3.2) platí:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^{m \cdot n} = 120\,000 \cdot (1 + \frac{0{,}015}{2})^{2 \cdot 3} = 125\,502{,}268.$$

Stav kapitálu po třech letech bude 125 502,27 Kč.

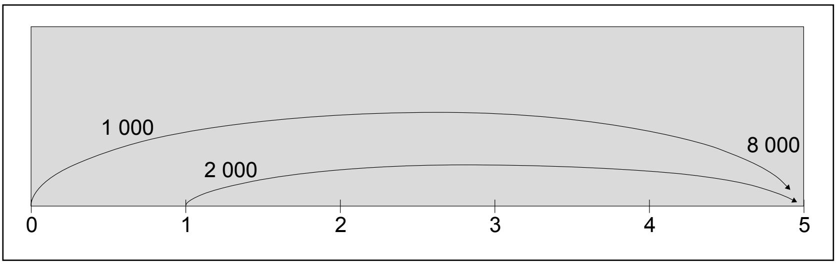
Srovnáme-li příklad 3-2 a příklad 3-1, vidíme, že čím častěji se připisují úroky, tím větší kapitál vlastníme (za jinak neměnných okolností). Častější připisování úroků je tedy pro vkladatele výhodné.

Příklad 3-3 *Splatná částka dluhu*

Za pět let máme zaplatit částku 8 000 Kč. Je však možné dluh splácet i v průběhu dané doby. Využijeme této možnosti a 1 000 Kč zaplatíme ihned, 2 000 Kč za rok a zbytek po uplynutí lhůty. Kolik bude činit tento zbytek při úrokové sazbě 8 % p.a. a ročním připisování úroků?

Řešení

Nejprve musíme zjistit budoucí hodnoty částek 1 000 Kč a 2 000 Kč na konci pátého roku. Součet budoucích hodnot těchto částek pak odečteme od 8 000 Kč.



Podle vztahu (3-1) vypočítáme budoucí hodnoty uvedených částek. Částka 1 000 Kč bude úročena po dobu pěti let, neboť je zaplacena ihned, a zajímá nás její budoucí hodnota na konci dané doby.

Dosadíme tedy K_0 = 1 000; n = 5; i = 0,08 a vypočítáme budoucí hodnotu:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = 1\,000 \cdot 1{,}08^5 = 1\,469{,}33.$$

Částka 2 000 Kč bude úročena po dobu čtyř let. Potřebujeme znát její budoucí hodnotu na konci pátého roku, a protože je zaplacena za rok, zbývají do konce dané doby čtyři roky.

Nyní dosadíme K_0 = 2 000; n = 4; i = 0,08. Budoucí hodnotu vypočítáme stejným způsobem:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = 2\,000 \cdot 1{,}08^4 = 2\,720{,}98.$$

Výslednou částku, kterou je nutno zaplatit na konci pátého roku, získáme odečtením součtu vypočtených budoucích hodnot od požadovaných 8 000 Kč:

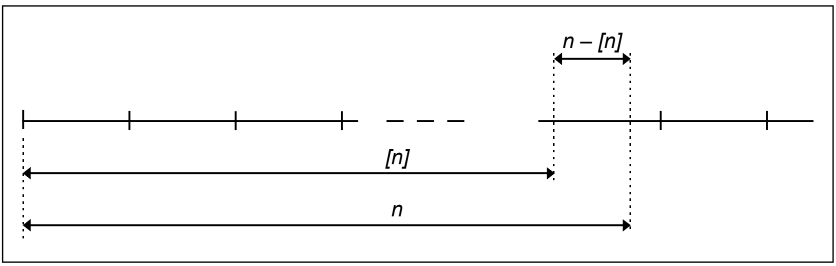
8 000 – 1 469,33 – 2 720,98 = 3 809,69.

Na konci pátého roku doplatíme částku 3 809,69 Kč.

3.2 Kombinace jednoduchého a složeného úročení – smíšené úročení

V tomto oddíle nebudeme již předpokládat, že doba splatnosti n vyjádřená v letech je celé číslo (viz obr. 3.2).

Ke kombinaci jednoduchého a složeného úročení dochází tehdy, jestliže jsou úroky po určitou dobu připisovány k počátečnímu vkladu a s ním dále úročeny (složené úročení), ale na konci je třeba vypočítat úrok za období kratší, než je úrokové období (jednoduché úročení).



Obrázek 3.2 Doba splatnosti při smíšeném úročení

Předpokládejme nyní, že úroky se připisují vždy na konci roku. Doba n, po kterou je kapitál uložen, není přirozené číslo; pak je možno n zapsat:

$$n = [n] + (n - [n]),$$

kde $[n]$ je přirozené číslo, značící počet ukončených let, po která je kapitál uložen – celá část n;

$n - [n]$ je číslo menší než 1, označující necelou část roku.

Konečnou výši kapitálu za dobu n určíme tak, že nejprve vypočteme (na základě složeného úročení) výši kapitálu $K_{[n]}$ po $[n]$ letech, a tu potom po $(n-[n])$ část roku zúročíme na základě jednoduchého úročení. Výši kapitálu po celých $[n]$ letech určíme podle vztahu (3-1) jako:

$$K_{[n]} = K_0 \cdot (1+i)^{[n]}.$$

Konečná výše kapitálu K_n se potom vypočte jednoduchým úročením zúročené výše kapitálu $K_{[n]}$ podle vzorce:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^{[n]} \cdot \left(1+(n-[n]) \cdot i\right). \tag{3-3}$$

Původní kapitál K_0 se po dobu $[n]$, tedy po ukončený počet let, úročí složeně, a poté se ještě kapitál $K_{[n]}$ úročí jednoduše podle vztahu (2-7) po dobu $n-[n]$.

Konečná výše kapitálu K_n vypočtená podle vztahu (3-3), tedy kombinací složeného a jednoduchého úročení, je vyšší než v případě, že bychom postupovali podle vztahu (3-1), to znamená po celou dobu n pouze složené úročení, kde bychom dobu n, po kterou je kapitál úročen, vyjádřili racionálním číslem.

Příklad 3-4 *Budoucí hodnota při smíšeném úročení a ročním úrokovém období*

Na kolik Kč vzroste vklad 150 000 Kč, uložený tři roky a pět měsíců při úrokové sazbě 1,5 % p.a.? Úroky jsou připisovány ročně a dále pak úročeny s vkladem.

Řešení

Použijeme vztah (3-3) a dosadíme: K_0 = 150 000; n = 3 roky 5 měs. = = 3,41666; $[n]$ = 3; $n-[n]$ = 5 / 12; i = 0,015. Potom získáme:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^{[n]} \cdot \left(1+(n-[n]) \cdot i\right) = 150\,000 \cdot 1{,}015^3 \cdot 1{,}01875 = 157\,832{,}079.$$

Vklad vzroste na 157 832,08 Kč.

Kdybychom použili pro výpočet úroku v uvedeném příkladě vztah (3,1) s tím, že za n vezmeme racionální číslo, vyjadřující celkovou dobu uložení vkladu v letech (tři roky a pět měsíců, tj. 3,41666 roku), bude konečná výše vkladu rovna:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = 150\,000 \cdot 1{,}015^{3{,}41666} = 157\,827{,}824.$$

Konečná výše zúročeného vkladu je v tomto případě nižší, rozdíl činí v daném příkladě přibližně 4,25 Kč.

Podrobněji viz oddíl 3.7, kde srovnáme jednoduché a složené úročení, a obr. 3.3.

Ukažme si postup výpočtu v případě, že se úroky připisují m-krát do roka a doba n není dána celým číslem. Dobu n, po kterou je vklad úročen, můžeme vyjádřit jako součet:

$$n_m + l,$$

kde $n_m = m \cdot [n]$ je přirozené číslo, značící počet ukončených m-tin roku (úrokových období), po které je kapitál uložen;

$l = n - m \cdot [n]$ je číslo menší než m-tina roku, označuje necelou část roku kratší než úrokové období.

Konečnou výši kapitálu za dobu n určíme tak, že nejprve vypočteme (na základě složeného úročení) výši kapitálu K_{nm} po n_m obdobích, a tu potom po dobu l zúročíme na základě jednoduchého úročení. Výši kapitálu po n_m úrokových obdobích určíme podle vztahu (3-2) jako:

$$K_{n_m} = K_0 \cdot (1+\frac{i}{m})^{n_m}.$$

Konečná výše kapitálu K_n se potom vypočte jednoduchým úročením zúročené výše kapitálu K_{nm} podle vztahu (2-7). Tím dostaneme vztah:

$$K_n = K_0 \cdot (1+\frac{i}{m})^{n_m} \cdot (1+l \cdot i), \qquad \textbf{(3-4)}$$

kde K_n je výše kapitálu v době splatnosti n;

K_0 je počáteční kapitál;

i je roční úroková sazba;

m je počet úrokových období za rok;

n_m je přirozené číslo, značící počet ukončených m-tin roku (úrokových období), po které je kapitál uložen;

l je číslo menší než m-tina roku, vyjádřené jako část roku.

Úrokovou sazbu, která je udána jako roční, je nutno vydělit počtem úrokových období za rok pouze v úrokovacím faktoru pro složené úročení, neboť dobu l vyjadřujeme jako část roku kratší než 1 / m roku.

Příklad 3-5 *Budoucí hodnota při smíšeném úročení a úrokovém období kratším než jeden rok*

Na kolik Kč vzroste vklad 150 000 Kč, uložený tři roky a pět měsíců při 1,5% úrokové sazbě p.a. s a) pololetním, b) čtvrtletním a c) měsíčním připisováním úroků?

Řešení pro pololetní připisování úroků

Do vzorce (3-4) dosadíme K_0 = 150 000; n = 3 roky 5 měs.; m = 2; n_m = 3 · 2 = 6 ukončených úrokových období; l = 5 / 12; i = 0,015, a vypočítáme K_n:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^{n_m} \cdot (1 + l \cdot i) =$$

$$= 150\,000 \cdot (1 + \frac{0{,}015}{2})^6 \cdot (1 + 5/12 \cdot 0{,}015) = 157\,858{,}32.$$

Vklad vzroste na 157 858,32 Kč.

Řešení pro čtvrtletní připisování úroků

Analogicky dosadíme do vzorce (3-4) K_0 = 150 000; i = 0,015; n = 3 roky 5 měs.; m = 4; n_m = 3 · 4 + 1 = 13 ukončených úrokových období (za tři roky je jich dvanáct a další je součástí následujících pěti měsíců); l = 2 / 12 (zbývající dva měsíce, neboť tři měsíce z pěti tvoří ukončené úrokové období).

Podle vzorce (3-4) vypočítáme K_n:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^{n_m} \cdot (1 + l \cdot i) =$$

$$= 150\,000 \cdot (1 + \frac{0{,}015}{4})^{13} \cdot (1 + 2/12 \cdot 0{,}015) = 157\,873{,}01.$$

Vklad vzroste na 157 873,01 Kč.

Řešení pro měsíční připisování úroků

V tomto případě se nejedná o kombinaci složeného a jednoduchého úročení, neboť úroková doba (doba splatnosti) je 41 měsíců, tedy 41 ukončených úrokových období. Úrokovou sazbu také vyjádříme vzhledem k úrokovému období jako měsíční.

Dosadíme: K_0 = 150 000; n = 3 roky 5 měs. = 41 měsíců; m = 12; i = 0,015 / 12 = 0,00125 p.m. Podle vzorce (3-2) vypočítáme K_n:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = 150\,000 \cdot (1+0{,}00125)^{41} = 157\,882{,}85.$$

Vklad vzroste na 157 882,85 Kč.

Z tohoto příkladu je vidět skutečnost, kterou jsme již zmínili. Při častějším připisování úroků je budoucí hodnota vyšší.

3.3 Výpočet doby splatnosti

Ze základního vzorce pro složené polhůtní úročení je možno vypočítat ostatní veličiny.

Pro výpočet doby splatnosti kapitálu zlogaritmujeme vzorec (3-1) podle pravidel pro logaritmování součinu a pro logaritmování mocniny pomocí vztahů (1-10) a (1-12). Dostaneme:

$$\ln(K_n) = \ln(K_0) + n \cdot \ln(1+i).$$

Z toho vyjádříme n:

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(1+i)}. \qquad \textbf{(3-5)}$$

Je-li úrokové období kratší než rok, dochází-li k připisování úroků m-krát do roka, použijeme pro výpočet doby splatnosti vztah (3-2), zlogaritmujeme ho a dostaneme:

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{m \cdot \ln(1+\frac{i}{m})}. \qquad \textbf{(3-6)}$$

Příklad 3-6 *Doba splatnosti při složeném úročení*

Určete dobu splatnosti (uložení) kapitálu 10 000 Kč, jestliže bylo v době splatnosti vyplaceno 11 000 Kč při úrokové sazbě 2 % p.a. a pololetním polhůtním úročení.

Řešení

Při řešení tohoto příkladu vyjdeme ze vztahu (3-2) a ze vztahu (3-6):

Dosadíme K_0 = 10 000; K_n = 11 000; i = 0,02; m = 2.

Podle vztahu (3-6) vypočítáme n:

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{m \cdot \ln(1 + \frac{i}{m})} = \frac{\ln(11\,000) - \ln(10\,000)}{2 \cdot \ln(1{,}01)} = 4{,}789.$$

Doba splatnosti je tedy 4,789 roku.

Příklad 3-7 *Srovnání doby splatnosti při různé délce úrokového období*

Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční kapitál při úrokové sazbě 6 % p.a. při a) ročním připisování úroků, b) pololetním připisování úroků?

Řešení pro roční připisování úroků (roční úrokové období)

Ze zadání platí: $K_n = 2 \cdot K_0$. Dosadíme i = 0,1; m = 1 [vztah (3-6) se zjednoduší na (3-5)].

Využijeme vztah (3-6), vztah (1-11) pro logaritmování a dostaneme:

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{m \cdot \ln(1 + \frac{i}{m})} = \frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1+i)} = \frac{\ln(\frac{2 \cdot K_0}{K_0})}{\ln(1+0{,}06)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}06)} = 11{,}90.$$

Při ročním úročení a úrokové sazbě 10 % se vklad zdvojnásobí za 11,90 roku.

Řešení pro pololetní připisování úroků

Opět $K_n = 2 \cdot K_0$. Dosadíme i = 0,1; m = 2. Využijeme vztah (3-6), vztah (1-11) pro logaritmování a dostaneme:

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{m \cdot \ln(1 + \frac{i}{m})} = \frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{2 \cdot \ln(1 + \frac{i}{2})} = \frac{\ln(\frac{2 \cdot K_0}{K_0})}{2 \cdot \ln(1 + 0{,}03)} = \frac{\ln(2)}{2 \cdot \ln(1{,}03)} = 11{,}72.$$

Při pololetním úročení se vklad zdvojnásobí za 11,72 roku.

3.4 Současná hodnota při složeném úročení

Ze základní rovnice (3-1) můžeme též vypočítat počáteční hodnotu kapitálu, známe-li zbývající veličiny, podle vzorce:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}. \tag{3-7}$$

Počáteční kapitál K_0 představuje (analogicky jako u jednoduchého úročení) současnou hodnotu budoucího kapitálu K_n. Současná hodnota kapitálu nám říká, jak velký kapitál musíme dnes uložit, abychom po čase n a při úrokové sazbě i a za předpokladu reinvestování (kapitalizace) úroků, to je při složeném úročení, dosáhli kapitálu K_n.

Podle výrazu (3-7) dostaneme současnou hodnotu kapitálu K_n jeho vynásobením výrazem:

$$\frac{1}{(1+i)^n} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^n = v^n,$$

kde faktor v definovaný jako:

$$v = \frac{1}{(1+i)} = (1+i)^{-1} \tag{3-8}$$

se nazývá **diskontní faktor** a udává současnou hodnotu jednotkového vkladu, který je splatný za jeden rok při úrokové sazbě i.

Velký význam současné hodnoty tkví v tom, že nám umožňuje navzájem porovnat peněžní částky (kapitál) v čase. Nesmíme totiž zapomenout na to, že obnos získaný dnes má pro nás větší cenu než tentýž obnos získaný za n let. Čím dříve máme kapitál, tím dříve jej můžeme investovat (uložit) a tím dříve nám přináší i úrok.

Chceme-li vypočítat současnou hodnotu při znalosti budoucí hodnoty a není-li doba splatnosti n vyjádřena přirozeným číslem, aplikujeme vzorec (3-3). Pak získáme:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^{n_0} \cdot (1+l \cdot i)}, \qquad \textbf{(3-9)}$$

kde $n_0 = [n]$ je nejbližší nižší přirozené číslo k číslu n;
l $n - n_0 = n - [n]$.

Příklad 3-8 *Současná hodnota při smíšeném úročení*

Kolik musíme uložit, abychom za pět let a tři měsíce měli 100 000 Kč při úrokové sazbě 1,6 % p.a.? Úroky jsou připisovány jednou za rok, ponechávány na účtu a dále úročeny.

Řešení

Pro řešení využijeme vztah (3-9), kam dosadíme K_n = 100 000; i = 0,016; l = 3 / 12; n_0 = 5.

K_0 se potom vypočítá:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^{n_0} \cdot (1+l \cdot i)} = \frac{100\,000}{1{,}016^5 \cdot (1+3/12 \cdot 0{,}016)} = 92\,002{,}10.$$

V současné době je třeba uložit 92 002,10 Kč.

Příklad 3-9 *Současná hodnota při složeném úročení s ročním připisováním úroků*

Rozhodli jste se založit svému právě narozenému dítěti termínový bankovní účet, spojený s pevnou úrokovou sazbou 2,5 % p.a., a uložit dnes na tento účet takovou částku, aby si dítě mohlo v den svých osmnáctých narozenin vyzvednout z tohoto účtu celý milion korun. Kolik musíte uložit dnes do banky, předpokládáme-li roční úrokové období, úroky budou připisovány k vkladu a dále úročeny stejnou sazbou?

Řešení

Jedná se podobně jako v předchozím příkladu o výpočet současné hodnoty, tentokrát podle vztahu (3-7), kam dosadíme K_n = 1 000 000; n = 18; i = 0,025. Potom:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{1\,000\,000}{1{,}025^{18}} = 641\,165{,}90.$$

Musíte dnes uložit do banky 641 165,90 Kč.

Příklad 3-10 *Výpočet úrokové sazby a současné hodnoty*

Jaký byl počáteční kapitál a úroková sazba, při které byl uložen, víme-li, že po roce byl jeho stav 50 000 Kč a po dvou letech 52 500 Kč při ročním úrokovém období? Úroky byly připisovány k vkladu a dále úročeny spolu s ním stejnou sazbou.

Řešení

Ze zadání K_1 = 50 000; K_2 = 52 500. Potřebujeme vypočítat dvě veličiny, úrokovou sazbu i a počáteční kapitál K_0.

Stav kapitálu K_2 můžeme vyjádřit dvěma způsoby. Podle vztahu (3-1) platí:

$$K_2 = K_0 \cdot (1+i)^2.$$

Podle vztahu (3-7) můžeme vyjádřit současnou hodnotu:

$$K_0 = \frac{K_1}{(1+i)}.$$

Dosadíme-li z druhého vztahu do prvního, dostaneme:

$$K_2 = K_1 \cdot (1+i),$$

z toho:

$$i = \frac{K_2}{K_1} - 1 = \frac{52\,500}{50\,000} - 1 = 0{,}05.$$

Vklad byl uložen při úrokové sazbě 5 %.

Počáteční vklad vypočítáme podle vztahu (3-7):

$$K_0 = \frac{K_1}{(1+i)} = \frac{50\,000}{1{,}05} = 47\,619{,}05.$$

Počáteční vklad měl tedy hodnotu 47 619,05 Kč.

Pojem současné hodnoty nám umožňuje rozhodnout, jakým způsobem naložit s hotovostí. Můžeme v tomto případě srovnávat současnou hodnotu budoucích výnosů z investice s její cenou, přičemž uvažujeme úrokovou sazbu, při níž bychom mohli obnos (cenu investice) uložit.

Bude-li současná hodnota budoucích příjmů z investice vyšší než cena, znamená to, že investice je výhodná. Bude-li naopak současná hodnota budoucích příjmů nižší než cena investice, je lepší neinvestovat a obnos, který bychom zaplatili, raději uložit při dané úrokové sazbě.

Příklad 3-11 *Rozhodování o investici pomocí současné hodnoty*

Máme možnost koupit za 4 700 Kč investici (diskontovanou obligaci), která nám umožní získat za dva roky částku 5 000 Kč. Je to výhodná investice, uvažujeme-li úrokovou sazbu 3 % p.a. a roční připisování úroků?

Řešení

Podle vztahu (3-7) vypočítáme současnou hodnotu částky 5 000 Kč, kterou získáme za dva roky, a tu porovnáme s cenou, za kterou je možno investici nyní zakoupit.

Za jednotlivé proměnné dosadíme K_n = 5 000; n = 2; i = 0,03:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{5\,000}{1{,}03^2} = 4\,712{,}98.$$

Současná hodnota je 4 712,98 Kč, tj. je vyšší než požadovaná cena. Tedy abychom za dva roky měli 5 000 Kč, museli bychom dnes uložit částku 4 712,98 Kč. Kdybychom uložili pouze částku 4 700 Kč při úrokové sazbě 3 %, získali bychom podle vztahu (3-1) pouze částku 4 986,23 Kč. Investice je tedy za daných předpokladů výhodná.

Příklad 3-12 *Srovnání investičních variant na základě současné hodnoty*

Máme možnost koupit ojetý automobil. Je pro nás výhodnější hotově zaplatit 240 000 Kč, nebo dát zálohu 120 000 Kč a za tři roky doplatit 140 000 Kč? Co je pro nás výhodnější, máme-li možnost uložit peníze při 4% úrokové sazbě p.a. (úroky jsou připisovány pololetně, ponechány na účtu a dále úročeny stejnou sazbou).

Řešení

Naším úkolem je porovnat mezi sebou dva možné způsoby plateb: a) platbu v hotovosti ve výši 240 000 Kč a b) zálohu 120 000 Kč v hotovosti s doplatkem 140 000 Kč za tři roky. Abychom mohli obě platby porovnat, musíme vypočítat současnou hodnotu platby b). Pro výpočet použijeme vztah (3-7) pro výpočet současné hodnoty při složeném úročení a vztah (3-2), který zohledňuje častější úročení než jednou za rok. Dosadíme K_n = 140 000; i = 4 %; m = 2; n = 3 a vypočítáme K_0:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+\frac{i}{m})^{n\cdot m}} = \frac{140\,000}{1{,}02^6} = 124\,315{,}99.$$

Současná hodnota doplatku činí 124 315,99 Kč. K tomu přičteme zaplacenou zálohu 120 000 Kč a získáváme celkem 244 315,99 Kč. Tato částka je vyšší než 240 000 Kč, proto předpokládáme-li v průběhu budoucích tří let nezměněné úrokové podmínky, je pro nás výhodnější zaplatit v hotovosti, protože k tomu, abychom mohli za tři roky zaplatit 140 000 Kč, museli bychom dnes uložit 124 315,99 Kč.

Neboli: v případě, že zvolíme variantu b), zůstane nám po zaplacení zálohy oproti variantě a) „volných“ 120 000 Kč (platba – záloha). Uložíme-li tuto částku při dané úrokové sazbě na tři roky (do doby placení doplatku), bude zúročená suma po třech letech 134 983,68 Kč. To je méně než doplatek 140 000 Kč.

Současnou hodnotu používáme též, jak bylo v předchozím příkladu naznačeno, pro **investiční rozhodování**, při kterém hledáme nejvýhodnější investiční variantu. Provádíme to tak, že porovnáváme současnou hodnotu budoucích příjmů z investice s nyní vloženým kapitálem. Ta varianta, u které je největší rozdíl mezi současnou hodnotou budoucích příjmů z investice a na počátku vloženým kapitálem (cenou investice), je nejvýhodnější. Tento rozdíl se označuje jako **čistá současná hodnota** (ČSH)[10].

Příklad 3-13 *Čistá současná hodnota*

Jako ekonomický ředitel malé společnosti zvažujete dvě možné alternativní investice na dobu šesti let, přičemž se můžete rozhodnout pouze pro jednu z nich. Očekávané peněžní toky, které jsou s nimi spojené, jsou následující (uváděné částky jsou v Kč):

	Vložený kapitál	**Peněžní toky v jednotlivých letech**
Investice 1	100 000	25 000 ročně
Investice 2	100 000	24 000; 25 000; 27 000; 27 000; 26 000; 22 000

Uvažujeme úrokovou sazbu (výnosnost) 3 %. Která z investic je výhodnější?

<u>*Řešení*</u>

Nejdříve vypočítáme současnou hodnotu všech budoucích toků podle vztahu (3-7):

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}.$$

Tento vztah použijeme pro každé n od 1 do 6. Celková současná hodnota všech budoucích peněžních toků z investice bude součtem současných hodnot toků v jednotlivých letech.

Investice 1

Dosadíme K_n = 25 000; i = 0,03; n = 1; 2; 3; 4; 5; 6 a dostaneme:

$$K_0 = \frac{25\,000}{1{,}03^1} + \frac{25\,000}{1{,}03^2} + \frac{25\,000}{1{,}03^3} + \frac{25\,000}{1{,}03^4} + \frac{25\,000}{1{,}03^5} + \frac{25\,000}{1{,}03^6} = 135\,429{,}79.$$

Od této částky musíme odečíst investované prostředky, které činí 100 000. Tedy čistá současná hodnota investice je rovna:

ČSH = 135 430 – 100 000 = 35 430.

---

[10] Překlad anglického Net present value (NPV).

Investice 2

V tomto případě dosadíme po řadě K_n = 24 000; 25 000; 27 000; 27 000; 26 000; 22 000 hodnoty i = 0,03; n = 1; 2; 3; 4; 5; 6 a získáme:

$$K_0 = \frac{24\,000}{1{,}03} + \frac{25\,000}{1{,}03^2} + \frac{27\,000}{1{,}03^3} + \frac{27\,000}{1{,}03^4} + \frac{26\,000}{1{,}03^5} + \frac{22\,000}{1{,}03^6} = 136\,416{,}33.$$

Od této částky musíme odečíst investované prostředky, které u investice 2 činí 100 000. Tedy čistá současná hodnota investice je rovna:

ČSH = 136 416 – 100 000 = 36 416.

Vyšší ČSH jako rozdíl mezi současnou hodnotou všech budoucích peněžních toků a vloženým kapitálem je u druhé investice, která je proto výhodnější.

Součet současných hodnot stejných finančních toků lze provádět jednoduše na základě výrazu (5-2) pro současnou hodnotu anuitních plateb.

Peněžní toky spojené s investicí nemusejí být v každém období stejné; jak jsme ukázali u investice 2, mohou být různé a v některých obdobích i záporné. Postup při výpočtu čisté současné hodnoty je však stejný.

Při rozhodování o více investičních variantách můžeme postupovat i tím způsobem, že budeme hledat takovou úrokovou míru, při které se bude rovnat součet současných hodnot budoucích toků z investice hodnotě právě vloženého kapitálu. Tuto úrokovou míru nazýváme **vnitřní míra výnosu (vnitřní výnosové procento).**

Vnitřní míra výnosnosti je tedy ta úroková sazba, která vyhovuje následující rovnici:

$$K = \frac{u_1}{(1+i)} + \frac{u_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{u_n}{(1+i)^n}, \qquad \textbf{(3-10)}$$

kde K je vynaložený kapitál;
n je doba životnosti investice, resp. doba, za kterou počítáme míru výnosnosti investice;
$u_1 \ldots u_n$ jsou peněžní toky, spojené s investicí v jednotlivých letech;
i je vnitřní míra výnosu (vnitřní výnosové procento).

Ze vzorce je vidět, že určení takové míry není bez použití speciálního software snadnou záležitostí.

Pro ilustraci uvedeného postupu použijeme předcházející příklad.

Příklad 3-14 *Vnitřní výnosové procento*

Jako ekonomický ředitel malé společnosti zvažujete dvě možné alternativní investice na dobu šesti let, přičemž se můžete rozhodnout pouze pro jednu z nich. Očekávané peněžní toky, které jsou s nimi spojeny, jsou následující (uváděné částky jsou v Kč):

	Vložený kapitál	**Peněžní toky v jednotlivých letech**
Investice 1	100 000	25 000 ročně
Investice 2	100 000	24 000; 25 000; 27 000; 27 000; 26 000; 22 000

Která z investic má vyšší vnitřní výnosové procento?

Řešení

Použijeme výše uvedený výraz (3-10) pro obě investice a vypočítáme vnitřní výnosové procento např. pomocí finančního kalkulátoru.

Investice 1

Dosadíme K = 100 000; n = 6; u_j = 25 000 pro j =1; 2; 3; 4; 5; 6 do výrazu (3-10):

$$K = \frac{u_1}{(1+i)} + \frac{u_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{u_n}{(1+i)^n}$$

a dostaneme:

$$100\,000 = \frac{25\,000}{(1+i)} + \frac{25\,000}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{25\,000}{(1+i)^6}.$$

Výpočtem získáme:

$i = 12{,}98\ \%.$

Investice 2

Postupujeme obdobně. Nyní dosadíme K = 100 000; n = 6; u_1 = 24 000; u_2 = 25 000; u_3 = 27 000; u_4 = 27 000; u_5 = 26 000; u_6 = 22 000.

Dosadíme-li stejně jako u investice 1, dostaneme:

$$100\,000 = \frac{24\,000}{(1+i)} + \frac{25\,000}{(1+i)^2} + \frac{27\,000}{(1+i)^3} + \frac{27\,000}{(1+i)^4} + \frac{26\,000}{(1+i)^5} + \frac{22\,000}{(1+i)^6}.$$

Výpočtem získáme:

$i = 13{,}28\ \%.$

Podle provedených výpočtů vidíme, že podle metody čisté současné hodnoty i podle metody založené na vnitřním výnosovém procentu je lepší druhá investice (viz příklady 3-13 a 3-14).

3.5 Výpočet výnosnosti (úrokové sazby)

Ze základní rovnice (3-1) pro složené úročení polhůtní můžeme též vypočítat úrokovou sazbu. Vyjádříme-li z této rovnice úrokovou sazbu i, dostaneme:

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1, \qquad \textbf{(3-11)}$$

kde i je roční úroková sazba;
K_n je zúročený kapitál;
K_0 je počáteční kapitál;
n je doba splatnosti kapitálu.

Vzhledem k tomu, že zde je i závislá na současné a budoucí hodnotě kapitálu a na době splatnosti, bude se spíše jednat o výpočet výnosnosti. Z matematického hlediska se jedná o stejný postup, jako bylo uvedeno v oddílu 2.4.

Příklad 3-15 *Výpočet úrokové sazby při složeném úročení*

Jaká byla roční úroková sazba z vkladu, jestliže částka 20 000 Kč vzrostla za čtyři roky na 23 400 Kč? Úroky byly vypláceny jedenkrát ročně, ponechány na účtu a dále úročeny.

Řešení

Využijeme vztah (3-11):

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = \sqrt[4]{\frac{23\,400}{20\,000}} - 1 = 0{,}04.$$

Úroková sazba byla 4 % p.a.

3.6 Výpočet úroku

Chceme-li zjistit absolutní výši úroku, využijeme vztah (3-1) nebo (3-2), který je obecnější. Vyjádříme-li v dané rovnici úrok u jako rozdíl mezi zúročenou a původní výší kapitálu, dostaneme:

$$u = K_n - K_0 = K_0 \cdot \left[(1 + \frac{i}{m})^{m \cdot n} - 1 \right], \tag{3-12}$$

kde K_0 je původní kapitál;
K_n je zúročený kapitál;
i je roční úroková míra;
i/m je úroková míra za jednu m-tinu roku;
m je počet úrokových období za jeden rok;
n je doba splatnosti kapitálu v letech.

Příklad 3-16 *Úrok při složeném úročení*

Jaká bude výše úroku z kapitálu 200 000 Kč za tři roky při pevné úrokové sazbě 2,5 % p.a., jsou-li úroky připisovány čtvrtletně, ponechány na účtu a dále úročeny jako vklad?

Řešení

Dosadíme K_0 = 200 000; m = 4; i = 0,025; n = 3 a vypočítáme podle vztahu (3-12) úrok u:

$$u = K_n - K_0 = K_0 \cdot \left[(1 + \frac{i}{m})^{m \cdot n} - 1 \right] = 200\,000 \cdot \left[(1 + \frac{0{,}025}{4})^{4 \cdot 3} - 1 \right] = 15\,526{,}52.$$

Úrok činí 15 526,52 Kč.

3.7 Srovnání jednoduchého a složeného úročení

Při jednoduchém úročení je stav vkladu za dobu n dán vzorcem:

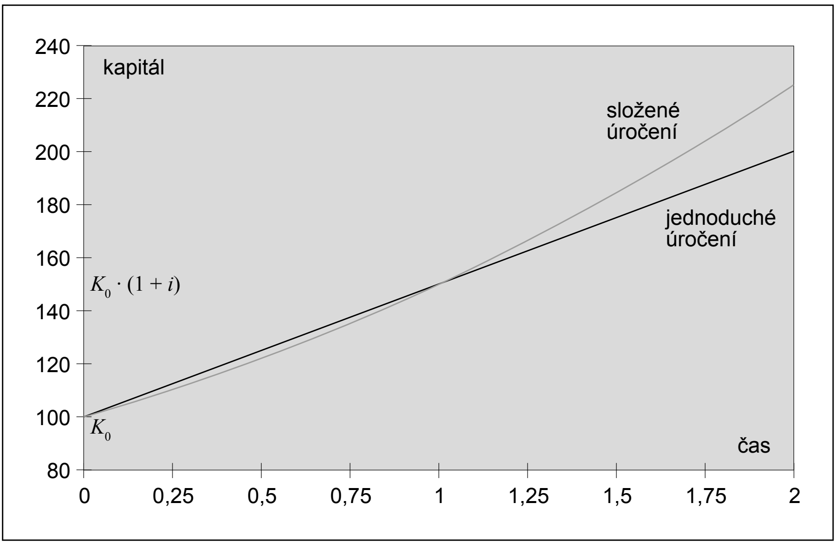
$$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n),$$

který je možno graficky znázornit lineární funkcí, vyjádřenou vztahem (1-4), kde $q = K_0$ a $k = K_0 \cdot i$.

Při složeném úročení je stav vkladu za dobu n určen vzorcem (3-1):

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n,$$

který je možno znázornit exponenciální funkcí danou vztahem (1-7).



Obrázek 3.3 Souvislost mezi jednoduchým a složeným úročením

Obě funkce mají stejné funkční hodnoty pro $n = 0$, a to hodnotu K_0, a pro $n = 1$, a to hodnotu $K_0 \cdot (1 + i)$.

Je-li $n \in (0,1)$, jsou funkční hodnoty exponenciální funkce menší než hodnoty lineární funkce. Pro $n > 1$ je tomu naopak.

Z obrázku 3.3 je tedy jasné, že pro věřitele je výhodnější, jsou-li úroky z vkladu počítány kombinací složeného a jednoduchého úročení, je-li uložen po dobu delší než jedno úrokové období a přitom doba splatnosti není dána přirozeným číslem. To bylo ukázáno v příkladu 3-4.

Jinými slovy: úroky počítané pomocí vzorce pro složené úročení při splatnosti kratší než jeden rok (n < 1) jsou nižší než úroky vypočítané pro toto období pomocí jednoduchého úročení. Rozdíl však není příliš velký, jak je patrno z obr. 3.3.

3.8 Efektivní úroková sazba

Jak jsme ukázali v příkladech 3-1 a 3-2, je při stejné nominální roční úrokové sazbě pro vkladatele výhodnější, připisují-li se úroky vícekrát ročně, protože se opět úrokují.

Připisují-li se úroky na konci každé 1 / m roku, bude celkový úrok při stejné úrokové sazbě (za předpokladu dalšího úročení těchto úroků) vyšší než v případě, kdy se úroky připíší pouze jednou na konci roku.

Má-li být dosaženo při obou způsobech připisování úroku stejného finančního efektu, musí být nominální úroková sazba při ročním úrokovém období vyšší než při úrokovém období kratším než rok. **Efektivní úroková sazba** je tedy roční úroková sazba, která dává za rok při ročním úrokovém období stejnou budoucí hodnotu jako roční úroková sazba i při častějším připisování úroků.

Efektivní úroková sazba nám umožňuje porovnat různé úrokové sazby za stejné časové období, avšak s různou četností připisování úroků. Např. roční efektivní úroková sazba nám říká, jak velká roční úroková sazba při ročním připisování úroků odpovídá roční úrokové sazbě při častějším připisování úroků.

Vzhledem k tomu, že výše kapitálu má být na konci roku při obou způsobech úročení stejná, musí pro efektivní úrokovou sazbu platit:

$$1 + i_e = (1 + \frac{i}{m})^m ,$$

kde i_e je efektivní úroková sazba;
i je roční úroková sazba;

m je počet úrokových období, tzn. m-krát za rok jsou připisovány úroky.

Tedy:

$$i_e = (1 + \frac{i}{m})^m - 1. \quad \textbf{(3-13)}$$

Příklad 3-17 *Výpočet efektivní úrokové sazby*

Najděte efektivní úrokovou sazbu, která odpovídá úrokové sazbě 4 % p.a., jsou-li úroky připisovány: a) pololetně, b) čtvrtletně, c) měsíčně.

Řešení

Dosadíme do vztahu (3-13):

$$i_e = (1 + \frac{i}{m})^m - 1.$$

Varianta	**Dosazené hodnoty**	**Výpočet**	**Efektivní úroková sazba**
a)	m = 2, i = 0,04	i_e = 1,02^2 – 1 = 0,0404	4,04 %
b)	m = 4, i = 0,04	i_e = 1,01^4 – 1 = 0,0406	4,06 %
c)	m = 12, i = 0,04	i_e = 1,0033^{12} – 1 = 0,0407	4,07 %

Z uvedeného příkladu je vidět, že čím častěji se během roku připisují úroky, tím je to pro vkladatele výhodnější. Efektivní úroková sazba s počtem úrokových období za rok roste.

Kromě toho, jak často jsou vypláceny úroky, se do výše efektivní úrokové sazby v praxi mohou promítat i další faktory (např. bankou účtované provize, ážio či disážio).

Efektivní úrokovou míru je možno též využít pro rozhodnutí, který peněžní ústav zvolit pro uložení jistého obnosu nebo jaký způsob úročení si vybrat při otevírání účtů u peněžních ústavů, neboť nám umožňuje porovnat různé úrokové sazby poměřované za stejné časové období, avšak s různou frekvencí připisování úroků.

Příklad 3-18 *Srovnání investičních variant pomocí efektivní úrokové sazby*

Rozhodli jste se založit termínový účet u banky, která nabízí dva následující typy účtů: a) účet s 3% roční úrokovou sazbou a s denním připisováním úroků, b) účet s 3,1% roční úrokovou sazbou a s pololetním připisováním úroků. Kterému účtu dáte přednost?

Řešení

U obou účtů je nutno vypočítat efektivní úrokovou sazbu, kterou získáme použitím vztahu (3-13):

$i_e = (1 + \frac{i}{m})^m - 1,$ tj.

a) $i_e = (1 + \frac{0,03}{360})^{360} - 1 = 3,04\ \%,$

b) $i_e = (1 + \frac{0,031}{2})^2 - 1 = 3,12\ \%.$

Z výsledků je vidět, že druhý účet nabízí vyšší efektivní úrokovou sazbu; chceme-li získat vyšší konečný kapitál, založíme si u banky tento typ účtu.

3.9 Úroková intenzita – spojité úročení

Zatím jsme všechny časové intervaly posuzovali odděleně. Můžeme si představit, že počet úrokových období, ve kterých se připisují úroky, poroste až do nekonečna, jejich délka se tudíž zkracuje a klesá k nule. Hovoříme o spojitém úročení. Efektivní úroková sazba odpovídající tomuto případu se nazývá **úroková intenzita.** Vzhledem k tomu, že se jedná o efektivní úrokovou sazbu pro případ, že úroky jsou připisovány nekonečněkrát za rok (stále, spojitě), budeme ji označovat stejně jako v oddíle 3.8 v případě omezeného počtu úrokových období v roce, tedy i_e.

Pro úrokovou intenzitu i_e platí:

$$1 + i_e = \lim_{m \to \infty} (1 + \frac{i}{m})^m,$$

kde i_e je úroková intenzita;
i je roční úroková sazba;
m je počet úrokových období v roce.

Ze vztahu (1-8) víme, že:

$$\lim_{m \to \infty} (1 + \frac{1}{m})^m = \mathbf{e},$$

kde $\mathbf{e}$ = 2,718 je Eulerovo číslo.

Využijeme toho vztahu pro určení limity a napíšeme:

$$\lim_{m \to \infty} (1 + \frac{i}{m})^m = \lim_{m \to \infty} [(1 + \frac{1}{\frac{m}{i}})^{\frac{m}{i}}]^i = \mathbf{e}^i.$$

Z toho je vidět, že 1 Kč vzroste při úrokové míře 100 % za jeden rok při spojitém úročení na 2,718 Kč.

Vztah mezi úrokovou mírou a úrokovou intenzitou je následující:

$$i_e = \mathbf{e}^i - 1 \qquad \textbf{(3-14)}$$

a opačně:

$$i = \ln(1 + i_e). \qquad \textbf{(3-15)}$$

Úroková intenzita je maximální možná výnosnost při dané úrokové sazbě i.

Při spojitém úročení platí:

$$K_n = K_0 \cdot \mathbf{e}^{i \cdot n} \qquad \textbf{(3-16)}$$

kde K_0 je počáteční kapitál;
K_n je hodnota kapitálu za dobu n;
i je úroková sazba.

Ze vztahu (3-16) je možno též vypočítat hodnotu počátečního kapitálu, což je vlastně proces spojitého diskontování:

$$K_0 = K_n \cdot \mathbf{e}^{-i \cdot n}. \tag{3-17}$$

Příklad 3-19 *Výpočet úrokové sazby při spojitém úročení*

Jaká úroková sazba odpovídá efektivní úrokové sazbě při spojitém úročení (úrokové intenzitě) 3 %?

Řešení

Využijeme vztahu (3-15):

$$i = \ln(1 + i_e) = \ln(1,03) = 0,0295.$$

Úroková sazba je 2,95 %.

Příklad 3-20 *Budoucí hodnota při spojitém úročení*

Na kolik vzroste kapitál 10 000 Kč za pět let při spojitém úročení a sazbě 2,5 %?

Řešení

Do vztahu (3-16) dosadíme K_0 = 10 000; n = 5; i = 0,025 a vypočítáme K_n:

$$K_n = K_0 \cdot \mathbf{e}^{i \cdot n} = 10\,000 \cdot \mathbf{e}^{0,025 \cdot 5} = 11\,331,48.$$

Kapitál vzroste na 11 331,48 Kč.

Příklad 3-21 *Současná hodnota při spojitém úročení*

Jaká je současná hodnota kapitálu, který za tři roky vzroste na 25 000 Kč při 2,5 % úrokové sazbě a spojitém úročení?

Řešení

Dosazením do vztahu (3-17) dostaneme:

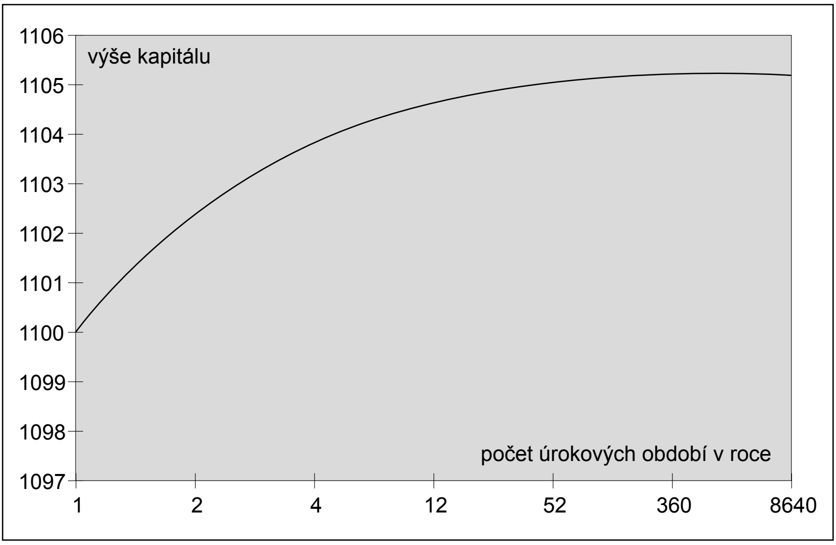
$$K_0 = K_n \cdot \mathbf{e}^{-i \cdot n} = 25\,000 \cdot \mathbf{e}^{-0,025 \cdot 3} = 23\,193,59.$$

Dnes musíme uložit 23 193,59 Kč, abychom za tři roky při spojitém úročení měli 25 000 Kč při roční úrokové sazbě 2,5 % p.a.

Z výše uvedených příkladů (3-19) a (3-21) plyne, že při použití spojitého úročení jsou výpočetní vztahy jednodušší než v případě nespojitém (diskrétním). Toho se často používá v teoretických pracích.

Nyní si ještě graficky znázorníme, jak se mění výše zúročeného kapitálu (budoucí hodnota) s rostoucím počtem úrokových období za rok.

Počet úrokových období v roce na ose x v obr. 3.4 označuje po řadě roční, pololetní, čtvrtletní, měsíční, týdenní, denní a hodinové připisování úroků. Z grafu je patrné, že nejvyšší rozdíl budoucích hodnot nastává v případě, že změníme roční úrokové období na pololetní (úroky jsou připisovány dvakrát). Změníme-li však týdenní úrokové období na denní, není rozdíl budoucích hodnot tak patrný. Budoucí hodnota je omezena (nezvyšuje se tedy s rostoucím počtem úrokových období do nekonečna), což je vyjádřeno vztahem (3-16) pro spojité úročení.



Obrázek 3.4 Vztah mezi frekvencí připisování úroků a budoucí hodnotou kapitálu

3.10 Nominální a reálná úroková sazba

Úrokové sazby, o kterých jsme dosud mluvili, jsou tzv. **nominální** úrokové sazby, to znamená takové, v jejichž hodnotě jsme nezohledňovali inflaci. Inflace, která ovlivňuje hodnotu peněz, samozřejmě znehodnocuje i úroky. Zahrneme-li do hodnoty úrokové sazby (úroku) inflaci, změny cenové hladiny, hovoříme o **reálné úrokové míře** (reálném úroku).

Označíme-li:

K_r reálnou výši kapitálu na konci úrokového období;

K_0 kapitál na počátku úrokového období;

i nominální úrokovou míru, vyjádřenou jako desetinné číslo;

i_r reálnou úrokovou míru, vyjádřenou jako desetinné číslo;

i_i míru inflace,

pak reálnou výši kapitálu na konci úrokového období (pro jednoduchost předpokládáme, že úrokové období je roční) vypočítáme tak, že nejprve počáteční kapitál úročíme nominální úrokovou sazbou, a pak jej diskontujeme inflační mírou, tedy:

$$K_r = K_0 \cdot (1+i) \cdot \frac{1}{1+i_i}.$$

Zároveň reálnou výši kapitálu získáme, zúročíme-li počáteční kapitál reálnou úrokovou sazbou. Tedy:

$$K_r = K_0 \cdot (1+i_r).$$

Reálnou výši kapitálu jsme vyjádřili dvěma způsoby. Porovnáním obou výrazů dostaneme:

$$K_0 \cdot (1+i) \cdot \frac{1}{1+i_i} = K_0 \cdot (1+i_r).$$

Po aritmetických úpravách získáme vztah známý jako Fisherova rovnice:

$$i = i_r + i_i + i_r \cdot i_i.$$

Vzhledem k tomu, že součin $i_r \cdot i_i$ je pro nízké hodnoty míry inflace a reálné úrokové míry relativně velmi malý, často se zanedbává a vztah mezi nominální a reálnou úrokovou mírou se uvádí jako:

$$i_r = i - i_i. \qquad \textbf{(3-18)}$$

Tento vztah můžeme interpretovat následovně:

Poskytneme-li kapitál s tím, že nám bude za rok vrácen, a předpokládáme-li nominální úrokovou míru 5 % a míru inflace nulovou, máme za rok reálně o 5 % více. Poskytneme-li však kapitál na jeden rok při nominální úrokové míře 7 %, ale míra inflace bude 10 %, máme za rok reálně o 3 % méně. Získali jsme sice kapitál zvýšený o 7 %, ale za zboží a služby vydáme o 10 % více než dříve.

Z uvedené úvahy je vidět, že růst nominální úrokové míry neznamená ještě růst reálné úrokové míry.

Příklad 3-22 *Reálná úroková míra*

Určete průměrnou reálnou úrokovou míru, kterou dosáhl klient do 31. 12. 2008, když uložil částku 250 000 Kč na termínovaný účet dne 1. 1. 2006 při nominální úrokové sazbě 2 % p.a. v prvním roce a v dalších dvou letech kapitál včetně úroků byl úročen sazbou 2,5 % a 3,5 % p.a. Míra inflace se v daných letech pohybovala v úrovní 0,5 %, 0,8 % a 1,2 %. Úroky z vkladů podléhají dani z příjmu vybírané srážkou ve výši 15 %.

Řešení:

Vyjdeme ze vztahu mezi nominální a reálnou úrokovou mírou

$$\left(1 + i \cdot (1 - d)\right) = (1 + i_r) \cdot (1 + i_i).$$

Pro reálné zhodnocení vloženého kapitálu bude platit:

$$K_n = K_0 \cdot \frac{1 + i \cdot (1 - d)}{1 + i_i}.$$

Protože máme v různých letech různé nominální úrokové sazby i a různé míry inflace i_i, vyjádříme budoucí hodnotu kapitálu jako

$$K_n = K_0 \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{1 + i_j \cdot (1-d)}{1 + i_{i\ j}}.$$

Pomocí reálné úrokové míry je možné budoucí hodnotu kapitálu vyjádřit vztahem:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_r)^n = K_0 \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{1 + i_j \cdot (1-d)}{1 + i_{i\,j}}.$$

$$i_r = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} \frac{1 + i_j \cdot (1-d)}{1 + i_{i\,j}}} - 1.$$

$$i_{real} = \sqrt[3]{\frac{1 + 0{,}02 \cdot 0{,}85}{1 + 0{,}005} + \frac{1 + 0{,}025 \cdot 0{,}85}{1 + 0{,}008} + \frac{1 + 0{,}035 \cdot 0{,}85}{1 + 0{,}012}} - 1 = 0{,}0142.$$

Průměrná reálná úroková míra byla 1,42 %.

3.11 Hrubý a čistý výnos

Všechny předcházející výpočty neuvažovaly se zdaněním. Počítali jsme tedy výši úroku (výnos) před zdaněním, neboli **hrubý výnos.** Úrokové výnosy ovšem podléhají zdanění. Jestliže od hrubého výnosu odečteme daň z příjmů, získáme **čistý výnos,** to znamená částku, kterou investor (věřitel) skutečně obdrží.

Hrubý výnos (úrok) je vyjádřen vztahem (2-2) jako:

$$u = K \cdot i \cdot n.$$

Z tohoto vztahu dostaneme **čistý výnos** odečtením daně z příjmu. To znamená, že pro čistý výnos potom platí:

$$u_č = K_0 \cdot i \cdot n - d \cdot K_0 \cdot i \cdot n = K_0 \cdot i \cdot (1-d) \cdot n, \qquad \textbf{(3-19)}$$

kde K_0 je počáteční kapitál;
$u_č$ je čistý výnos (úrok);
i je úroková sazba, vyjádřená jako desetinné číslo;
d je daňová sazba, vyjádřená jako desetinné číslo;
n je doba splatnosti, vyjádřená v letech (obvykle $0 < n < 1$).

Součtem počáteční výše kapitálu a čistého výnosu získáme **čistou konečnou výši kapitálu,** což můžeme zapsat jako:

$$_{\check{c}}K_n = K_0 + u_{\check{c}} = K_0 + K_0 \cdot i \cdot (1-d) \cdot n = K_0 \cdot [1 + i \cdot (1-d) \cdot n], \qquad \textbf{(3-20)}$$

kde $_{\check{c}}K_n$ je čistá konečná výše kapitálu.

V případě, že použijeme vyjádření úrokové a daňové sazby v procentech p.a. a úrokové doby ve dnech (t), můžeme vzorce pro čistý výnos, resp. pro čistou konečnou výši kapitálu, zapsat jako:

$$u_{\check{c}} = K_0 \cdot \frac{p \cdot t}{36\,000} \cdot \frac{100 - d_{\%}}{100}, \qquad \textbf{(3-21)}$$

resp.:

$$_{\check{c}}K_n = K_0 \cdot \left[1 + \frac{p \cdot (100 - d_{\%}) \cdot t}{36\,000 \cdot 100}\right], \qquad \textbf{(3-22)}$$

kde p je úroková sazba v % p.a.;
$d_{\%}$ je daňová sazba v %.

S využitím vztahu (2-9) a vztahu (3-19) můžeme odvodit i vztah pro **čistou roční výnosnost** (úrokovou sazbu), pro kterou platí:

$$i_{\check{c}} = \frac{u_{\check{c}}}{K_0 \cdot n} = \frac{_{\check{c}}K_n - K_0}{K_0 \cdot n} = i \cdot (1-d), \qquad \textbf{(3-23)}$$

kde $i_{\check{c}}$ je čistá výnosnost (čistá úroková sazba);
K_0 je počáteční kapitál;
$u_{\check{c}}$ je čistý výnos (úrok);
i je úroková sazba, vyjádřená jako desetinné číslo;
d je daňová sazba, vyjádřená jako desetinné číslo;
n je doba splatnosti, vyjádřená v letech (obvykle 0 < n < 1).

***Příklad 3-23** Čistá výnosnost*

Jaké čisté roční výnosnosti dosáhne klient, jestliže uložil na počátku roku částku 100 000 Kč na šestiměsíční termínový vklad při 2% úrokové sazbě p.a. a v polovině roku kapitál včetně vyplacených úroků znovu okamžitě uložil na šestiměsíční termínový vklad při 2,5% úrokové sazbě p.a.? Úroky z vkladů podléhají dani z příjmů vybírané srážkou ve výši 15 %.

Řešení

Vzhledem k tomu, že celková roční investice se skládala ze dvou vkladů s odlišnou úrokovou sazbou, musíme nejprve určit čistou konečnou výši kapitálu na konci roku (resp. celkový čistý výnos za rok), ze které potom dosazením do vzorce vypočteme čistou výnosnost.

Čistou výši kapitálu na konci prvního pololetí vypočteme podle vzorce (3-20), kam dosadíme K_0 = 100 000, i_1 = 0,02, n_1 = 1 / 2, d = 0,15 a dostaneme:

$${}_{\check{c}}K_{1/2} = K_0 \cdot \left[1 + i \cdot (1-d) \cdot n_1\right] = 100\,000 \cdot \left[1 + 0{,}02 \cdot (1 - 0{,}15) \cdot 0{,}5\right] = 100\,850.$$

Hodnotu vkladu na konci roku vypočítáme podle stejného výrazu, kde však K_0 = 100 850, což je hodnota vkladu na počátku druhého pololetí, a i_2 = 0,025, což je úroková sazba na druhé pololetí. Pro hodnotu vkladu na konci roku potom platí:

$$K_1 = K_{1/2} \cdot \left[1 + i_2 \cdot (1-d) \cdot n_2\right] = 100\,850 \cdot \left[1 + 0{,}025 \cdot (1 - 0{,}15) \cdot 0{,}5\right] = 101\,921{,}53.$$

Hodnotu vkladu na konci roku lze vypočítat z počáteční hodnoty najednou následujícím způsobem: za jednotlivé veličiny dosadíme K_0 = 100 000; i_1 = 0,02; i_2 = 0,025; $n_1 = n_2$ = 1 / 2; d = 0,15 a vypočítáme čistou konečnou hodnotu kapitálu na konci roku ${}_{\check{c}}K_n$:

$$\begin{aligned} {}_{\check{c}}K_n &= K_0 \cdot \left[1 + (1-d) \cdot i_1 \cdot n_1)\right] \cdot \left[1 + (1-d) \cdot i_2 \cdot n_2\right] = \\ &= 100\,000 \cdot (1 + 0{,}85 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}5) \cdot (1 + 0{,}85 \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}5) = 101\,921{,}53. \end{aligned}$$

Čistou míru výnosu vypočítáme podle vztahu (3-23) dosazením K_0 = 100 000; n = 1; ${}_{\check{c}}K_1$ = 101 921,53 a dostaneme:

$$i_{\check{c}} = \frac{{}_{\check{c}}K_1 - K_0}{K_0 \cdot n} = \frac{101\,921{,}53 - 100\,000}{100\,000} = 0{,}0192.$$

Čistá výnosnost za rok činila 1,92 % p.a.

Hrubou výnosnost (před zdaněním) bychom získali také podle vztahu (2-10) s tím, že výpočet budoucí hodnoty kapitálu K_n bychom provedli pomocí vztahu (2-7) a neuvažovali bychom zdanění. Tedy:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_1 \cdot n_1) \cdot (1 + i_2 \cdot n_2) = 100\,000 \cdot (1 + 0{,}02 \cdot 0{,}5) \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 0{,}5) =$$
$$= 102\,262{,}50.$$

Pro hrubou výnosnost nyní dostaneme:

$$i = \frac{K_1 - K_0}{K_0 \cdot n} = \frac{102\,262{,}50 - 100\,000}{100\,000} = 0{,}0226.$$

Hrubá míra výnosu činila 2,26 %.

Příklad 3-24 *Hrubá výnosnost*

Při jaké úrokové sazbě (nominální) byl uložen vklad 2 mil. Kč, jestliže za dva roky jeho hodnota vzrostla na částku 2 103 300,50 Kč (po zdanění)? Úroky byly připisovány jednou ročně, ponechány na účtu a dále úročeny stejnou úrokovou sazbou. Při připisování úroku je okamžitě srážena daň z úroků ve výši 15 %.

Řešení

Vyjdeme ze vztahu (3-11), který je nutno modifikovat, neboť nezohledňuje zdanění. Kdybychom vypočítali úrokovou sazbu pouze podle výrazu (3-11), získali bychom úrokovou sazbu o 15 % sníženou, tedy 85 % hledané úrokové sazby. Musíme proto výraz (3-11) vydělit číslem 0,85, obecně pak číslem (1 – d), kde d je daňová sazba (viz předcházející příklad):

$$i = \frac{\sqrt[n]{\dfrac{K_n}{K_0}} - 1}{1 - d} = \frac{\sqrt{\dfrac{2\,103\,300{,}50}{2\,000\,000}} - 1}{0{,}85} = 0{,}03.$$

Vklad byl uložen při nominální úrokové sazbě 3 %. Hrubá výnosnost tedy činila 3 %.

Chceme-li zjistit čistou míru výnosu z takového vkladu, vypočítáme úrokovou sazbu podle vztahu (3-11), kde K_n je budoucí hodnota kapitálu po zdanění:

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = \sqrt{\frac{2\,103\,300{,}50}{2\,000\,000}} - 1 = 0{,}0255.$$

Čistá míra výnosu byla 2,55 %.

Čistá míra výnosu $i_č$ se vypočítá na základě hrubé míry výnosu i_h následovně:

$i_č = i_h \cdot (1 - d) = 0{,}03 \cdot 0{,}85 = 2{,}55\ \%.$

4. Spoření

V předchozích dvou kapitolách jsme řešili příklady, jak vypočítat konečnou (budoucí) nebo počáteční (současnou) hodnotu určitého kapitálu, přičemž jeho počáteční hodnota se v průběhu doby nezvyšovala ani nesnižovala. V této kapitole bude naším cílem vypočítat, kolik uspoříme i s úroky z úspor za danou dobu, pokud budeme ukládat v pravidelných intervalech pevné částky (např. budeme každý měsíc spořit 1 000 Kč a na konci roku budeme mít 12 000 Kč plus úroky).

Úlohu rozdělíme na dvě části:

- **spoření krátkodobé,** kterým budeme rozumět spoření, jehož doba nepřesáhne jedno úrokové období (obvykle jeden rok), úroky budou připisovány na konci doby spoření, nejpozději na konci úrokového období, a jednotlivé úložky budou úročeny na základě jednoduchého úročení (viz kap. 2);
- **spoření dlouhodobé,** o kterém budeme hovořit v případě, že doba spoření bude delší než jedno úrokové období. V tomto případě se úroky na konci každého úrokového období připíší k dříve naspořené částce a dále se s touto částkou úročí.

V dalším textu budeme nazývat celkový součet vkladů za danou dobu jako **částku uloženou** a připočteme-li k ní úroky ze všech úložek (u každé úložky bude úrok jiný, neboť doba rozhodná pro výpočet úroku se u jednotlivých úložek liší), budeme hovořit o **částce naspořené (budoucí hodnotě anuity)**[11]. Vezmeme-li opět případ spoření 1 000 Kč každý měsíc, bude částka uložená na konci roku činit 12 000 Kč a částka naspořená bude 12 000 Kč plus úroky z jednotlivých úložek, přičemž první úložka bude úročena o měsíc déle než druhá, ta zase o měsíc déle než třetí atd.

4.1 Spoření krátkodobé

Předpokládejme nyní, že úrokové období je jeden rok. To znamená, že úroky jsou připisovány najednou vždy na konci roku.

---

[11] Anuitou zde rozumíme sérii pravidelných plateb (úložek) ve stejné výši. Terminologie v této oblasti není jednoznačná, neboť někdy je anuitou nazývána jednotlivá platba.

Dále předpokládejme, že pravidelné částky se budou ukládat m-krát za rok a budou úročeny jednoduše. Podle toho, zda se budou ukládat na počátku nebo na konci každé m-tiny roku, rozlišujeme spoření předlhůtní nebo polhůtní.

4.1.1 Spoření krátkodobé předlhůtní

Nejprve předpokládáme, že budeme ukládat na počátku každé m-tiny roku m-tinu korun z celkové roční částky plánované k uložení. Chceme zjistit, kolik budou činit naše úspory i s úroky na konci roku při roční úrokové sazbě i.

Pro jednoduchost odvození budeme předpokládat, že celková roční uložená částka se bude rovnat jedné koruně; výše úložky bude činit při m úložkách 1 / m Kč.

Celkově bylo uloženo: m · 1 / m Kč = 1 Kč.

Úroky z jednotlivých splátek jsou uvedeny v tabulce 4.1.

Pořadí úložky	**Úroková doba**	**Úrok**
1	$m \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m}{m}$
2	$(m-1) \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m-1}{m}$
3	$(m-2) \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m-2}{m}$
:	:	:
m	$1 \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{1}{m}$

Tabulka 4.1 Úroky z jednotlivých splátek při spoření krátkodobém předlhůtním

Zde m značí počet vkladů v rámci jednoho roku. Zároveň je to počet období, ve kterých se ukládá. Např. pro měsíční spoření je m = 12, pro čtvrtletní m = 4 atd.

Úroková doba je část roku, po kterou je každá úložka jednoduše úročena. Je dána součinem, v němž první činitel vyjadřuje počet období (částí roku), po kterou je daná splátka úročena, a druhý činitel vyjadřuje délku tohoto období (vyjádřenou jako část úrokového období, v našem případě roku; např. pro m = 12 je to 1/12 roku).

Úrok je zde počítán podle vzorce (2-2), tedy na základě jednoduchého úročení.

Celkový úrok počítáme jako součet úroků z jednotlivých úložek, které tvoří aritmetickou posloupnost. Celkový úrok dostaneme podle vzorce (1-16) pro součet konečné aritmetické řady.

Sečteme-li tedy úroky z jednotlivých úložek a dosadíme-li do vzorce (1-16), dostaneme:

$$u = \frac{i}{m^2} \cdot [m + (m-1) + (m-2) + \ldots + 1] = \frac{i}{m^2} \cdot \frac{m \cdot (m+1)}{2}.$$

Po úpravě získáme:

$$u = \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i, \qquad \textbf{(4-1)}$$

kde u je úrok za jedno úrokové období (rok);
m je počet vkladů v rámci jednoho úrokového období;
i je roční úroková sazba.

Celková naspořená částka za rok S'_1, spoříme-li každou m-tinu roku 1/ m z 1 Kč, tedy činí:

$$S'_1 = 1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i.$$

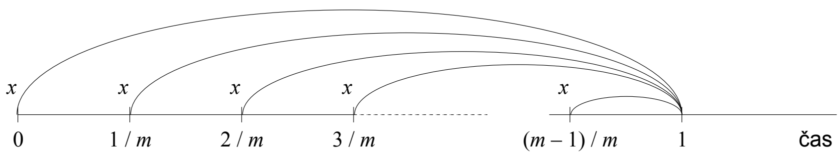
Je to vlastně celková roční uložená částka (1 Kč) plus úrok.

Není-li celkově uložená částka 1 Kč, ale $x \cdot m$ Kč, tedy spoříme-li každou m-tinu roku x Kč (neboli výše jedné splátky se rovná x Kč), potom můžeme celkovou naspořenou částku na konci roku včetně úroků vyjádřit vzorcem:

$$S'_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i). \qquad \textbf{(4-2)}$$

Vzorec (4-2) odvodíme z předchozího vzorce jednoduchou úvahou: víme-li, kolik bude činit celková naspořená částka z 1 Kč, potom z částky $x \cdot m$ bude celková naspořená částka $(x \cdot m)$krát větší.

Schematicky je možno krátkodobé předlhůtní spoření znázornit na obr. 4.1.



Obrázek 4.1 Schéma krátkodobého předlhůtního spoření

Příklad 4-1 *Naspořená částka za jedno úrokové období*

Kolik uspoříme včetně úroků do konce roku, ukládáme-li počátkem každého měsíce 1 700 Kč při úrokové sazbě 2 % p.a.?

<u>*Řešení*</u>

Využijeme vzorec (4-2) a dosadíme m = 12; i = 0,02; x = 1 700. Vypočítáme naspořenou částku S'_x:

$$S'_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i) = 12 \cdot 1\,700 \cdot (1 + \frac{13}{24} \cdot 0{,}02) = 20\,621.$$

Do konce roku uspoříme 20 621 Kč[12].

[12] Abychom viděli rozdíl oproti spoření s měsíčním připisováním úroků, je uveden příklad 4-10 se stejnými číselnými údaji.

Toto je příklad, který ilustruje naspořenou částku při stavebním spoření, spoříme-li měsíčně 1 700 Kč (od poplatků peněžnímu ústavu abstrahujeme), přičemž 15 % z ní činí státní podpora. Ta je ale limitována částkou 3 000 Kč.

V našem příkladu činí 15 % z naspořené částky 20 621 · 0,15 = = 3 093,15 Kč.

Klient by však dostal podporu ve výši pouze 3 000 Kč. Z výše uvedeného vyplývá, že z hlediska vyšší míry výnosu by bylo lepší spořit měsíčně jen tolik, aby naspořená částka včetně úroků činila právě 20 000 Kč (viz následující příklad).

Příklad 4-2 *Výše úložky při spoření v rámci jednoho úrokového období*

Kolik musíme spořit na počátku každého měsíce, abychom za rok našetřili 20 000 Kč při úrokové sazbě 2 % p.a.?

Řešení

Jedná se o krátkodobé spoření předlhůtní a pro výpočet využijeme vzorce (4-2). Dosadíme S'_x = 20 000; m = 12; i = 0,02. Ze vzorce (4-2) vyjádříme vztah pro výši úložky x:

$$S'_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i),$$

z čehož:

$$x = \frac{S_x}{m \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i)} = \frac{20\,000}{12 \cdot (1 + \frac{13}{24} \cdot 0{,}02)} = 1\,648{,}80.$$

Měsíčně je nutno spořit 1 648,80 Kč.

4.1.2 Spoření krátkodobé polhůtní

O polhůtním spoření hovoříme tehdy, ukládáme-li částky vždy na konci určitého období. Pro odvození vzorce pro výpočet celkové naspořené částky při krátkodobém spoření předpokládáme opět, že úrokové období je roční, a dále, že budeme na konci každé m-tiny roku ukládat 1 / m Kč.

Platí tedy, že celkem bylo uloženo $m \cdot 1 / m$ Kč = 1 Kč.

Úroky z jednotlivých splátek jsou uvedeny v tab. 4.2.

Pořadí úložky	Úroková doba	Úrok
1	$(m-1)\cdot\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}\cdot i\cdot\frac{m-1}{m}$
2	$(m-2)\cdot\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}\cdot i\cdot\frac{m-2}{m}$
:	:	:
m – 1	$1\cdot\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}\cdot i\cdot\frac{1}{m}$
m	$0\cdot\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}\cdot i\cdot\frac{0}{m}$

Tabulka 4.2 Úroky z jednotlivých splátek při spoření krátkodobém polhůtním

Tím, že částky jsou ukládány vždy na konci příslušného období (části roku), je oproti předlhůtnímu spoření počet těchto období (po které je splátka úročena) o jedno období nižší.

Z poslední úložky v tomto případě nebudeme mít žádný úrok, protože bude uložena na konci roku.

Celkový úrok vypočítáme stejně jako v případě předlhůtního spoření podle vzorce (1-16) pro součet konečné aritmetické řady:

$$u = \frac{i}{m^2}\cdot[(m-1)+(m-2)+\ldots+1+0] = \frac{i}{m^2}\cdot\frac{m\cdot(m-1)}{2}.$$

Po úpravě získáme:

$$u = \frac{m-1}{2\cdot m}\cdot i. \qquad \textbf{(4-3)}$$

Celková uspořená částka za rok včetně úroků (S_1), spoříme-li každou m-tinu roku 1 / m Kč, tedy činí:

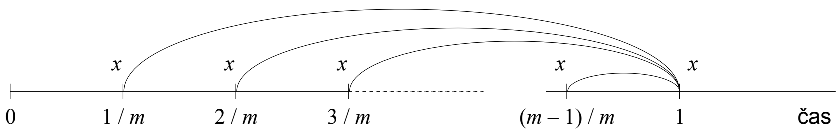
$$S_1 = 1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i.$$

Analogicky jako v předchozím případě je to vlastně celkově vložená částka (1 Kč) plus úrok.

Je-li celkově uložená částka $x \cdot m$ Kč, tedy spoříme-li každou m-tinu roku x Kč, potom celkovou uspořenou částku na konci roku včetně úroků dostaneme analogicky jako u předlhůtního střádání. Tedy:

$$S_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i). \quad \textbf{(4-4)}$$

To je schematicky znázorněno na obr. 4.2.



Obrázek 4.2 Schéma krátkodobého polhůtního spoření

Příklad 4-3 *Naspořená částka na konci úrokového období*

Kolik uspoříme do konce roku, ukládáme-li koncem každého měsíce 1 700 Kč při úrokové sazbě 2 % p.a.?

<u>*Řešení*</u>

Využijeme vzorec (4-4) a dosadíme m = 12; i = 0,02; x = 1 700. Vypočítáme naspořenou částku S_x.

$$S_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) = 12 \cdot 1\,700 \cdot (1 + \frac{11}{24} \cdot 0{,}02) = 20\,587.$$

Do konce roku uspoříme 20 587 Kč.

Rozdíl mezi úsporami při předlhůtním a polhůtním spoření je de facto v ročním úroku z jedné splátky. Ve dvou srovnatelných předchozích příkladech (4-1 a 4-3) je rozdíl 34 Kč, což je úrok z 1 700 Kč za rok, neboť 1 700 · 0,02 = 34 Kč.

Budeme-li stavební spořitelně posílat částku 1 700 Kč na konci měsíce, budeme mít první úložku k dispozici celý rok. To je patrné porovnáním tabulek úroků 4.1 a 4.2. Částka, která je ukládána polhůtně na konci prvního měsíce, přinese stejný úrok jako částka, která je ukládána předlhůtně na počátku druhého měsíce. Tedy všechny úložky s výjimkou první předlhůtní jsou při obou typech úročení totožné.

Stejně jako v oddíle 4.1.1, i zde můžeme vypočítat, kolik je třeba polhůtně ukládat, abychom naspořili i s úroky částku 20 000 Kč.

Příklad 4-4 *Výše úložky při spoření v rámci jednoho úrokového období*

Kolik musíme spořit na konci každého měsíce, abychom za rok našetřili 20 000 Kč při úrokové sazbě 2 % p.a.?

Řešení

Pro výpočet využijeme vzorce (4-4) a dosadíme S_x = 20 000; m = 12; i = 0,02. Vypočítáme výši úložky x:

$$S_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i),$$

z čehož:

$$x = \frac{S_x}{m \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i)} = \frac{20\,000}{12 \cdot (1 + \frac{11}{24} \cdot 0{,}02)} = 1\,651{,}53.$$

Měsíčně je v tomto případě nutno spořit 1 651,53 Kč, což je téměř o 3 Kč více než při stejných úložkách na začátku měsíce (viz příklad 4-2).

Pomocí krátkodobého spoření je možno zjistit též hodnotu pravidelných konstantních splátek krátkodobé půjčky, která je poskytnuta na základě jednoduchého úročení.

Příklad 4-5 *Výše splátky dluhu spláceného v rámci úrokového období*

Kolik je nutno koncem každého měsíce splácet věřiteli, jestliže nám zapůjčil částku 18 000 Kč, kterou chce splácet měsíčními splátkami po dobu dvanácti měsíců? Úroková sazba činí 5 % p.a.

Řešení

Vyjdeme z úvahy, že věřitel mohl částku 18 000 Kč uložit při dané úrokové sazbě, a na konci roku by tedy disponoval částkou, kterou vypočteme dle vztahu (2-6):

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n) = 18\,000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 1) = 18\,900.$$

Na konci roku by věřitel měl 18 900 Kč. Stejnou částku musí obdržet, bude-li mu dlužník měsíčně splácet částku x a posílat ji na účet, úročený danou úrokovou sazbou.

Částku x můžeme tedy vypočítat pomocí výrazu (4-4):

$$S_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i),$$

z něhož vyjádříme x:

$$x = \frac{S_x}{m \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i)} = \frac{18\,900}{12 \cdot (1 + \frac{11}{24} \cdot 0{,}05)} = 1\,539{,}71.$$

Dlužník musí splácet částku 1 539,71 Kč.

Příklad 4-6 *Výše úrokové sazby pro dosažení dané naspořené částky*

Při kolikaprocentní úrokové sazbě uspoříme za jeden rok 10 000 Kč, jestliže koncem každého čtvrtletí ukládáme 2 400 Kč?

Řešení

Využijeme vzorce (4-4) a dosadíme S_x = 10 000; m = 4; x = 2 460 a vyjádříme úrokovou sazbu i:

$$S_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i).$$

Z toho vyjádříme i:

$$i = \frac{S_x - m \cdot x}{\frac{m \cdot x \cdot (m-1)}{2 \cdot m}} = \frac{160}{\frac{4 \cdot 2\,460 \cdot 3}{2 \cdot 4}} = 0{,}0433.$$

Požadovanou částku uspoříme při úrokové sazbě 4,33 %.

Bude-li úrokové období kratší než jeden rok, např. pololetní, čtvrtletní apod., přizpůsobíme jednak úrokovou sazbu délce úrokového období, jednak počet úložek m. Odvozené vztahy samozřejmě platí pro každé úrokové období, neboť jsou odvozeny jako zcela obecné.

Příklad 4-7 *Naspořená částka za jedno úrokové období kratší než rok*

Kolik naspoříme do konce čtvrtletí, ukládáme-li počátkem měsíce 1 000 Kč při úrokové sazbě 4,8 % p.a.?

Řešení

Jedná se o předlhůtní spoření. Pro výpočet použijeme vztah (4-2), kde m = 3; x = 1 000; i = 0,048 / 4 = 0,012 p.q.:

$$S'_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i) = 3 \cdot 1\,000 \cdot (1 + \frac{4}{6} \cdot 0{,}012) = 3\,024.$$

Do konce čtvrtletí uspoříme 3 024 Kč.

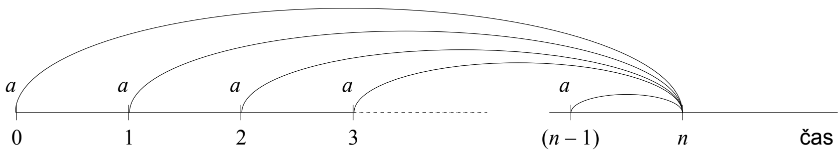
4.2 Dlouhodobé spoření

O dlouhodobém spoření budeme hovořit, jestliže půjde o spoření za několik úrokových období. Pro odvození vzorců pro výpočet celkové naspořené částky za n období budeme přepokládat, že v rámci úrokového období spoříme pouze jednou, a dále, že úrokové období je jeden rok. Podle toho, zda částka bude uložena na počátku či na konci úrokového období, budeme opět rozlišovat spoření předlhůtní či polhůtní.

4.2.1 Spoření dlouhodobé předlhůtní

Na počátku každého úrokového období, v našem případě na počátku každého roku, ukládáme částku a. Naším úkolem je zjistit, kolik činí úspory na konci n-tého období při úrokové sazbě i, přičemž stále předpokládáme, že úrokové období je roční, tedy že úroky jsou připisovány na konci roku (viz obr. 4.3).

Pro určení celkové hodnoty uspořené částky včetně úroků na konci n-tého období vypočítáme zúročenou výši všech vkladů ku konci n-tého období a sečteme je (viz tab. 4.3).



Obrázek 4.3 Schéma spoření dlouhodobého předlhůtního

Pořadí úložky	Počet období, po které je uložena	Celková hodnota na konci n-tého období
1	n	$a \cdot (1+i)^n$
2	$n-1$	$a \cdot (1+i)^{n-1}$
:	:	:
n	1	$a \cdot (1+i)$

Tabulka 4.3 Úroky z jednotlivých úložek při spoření dlouhodobém předlhůtním

Pro výpočet budoucí hodnoty jednotlivých splátek na konci n-tého období jsme využili vzorec (3-1).

Konečný stav úspor (naspořenou částku, **budoucí hodnotu anuity**) S' vypočítáme jako součet hodnot jednotlivých úložek na konci n-tého období:

$$S' = a \cdot (1+i) \cdot [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + 1].$$

Výraz v závorce je geometrická řada s kvocientem $(1 + i)$ a prvním členem $a_1 = a \cdot (1 + i)$. Podle vzorce (1-18) pro součet geometrické řady dostaneme:

$$S' = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \qquad \textbf{(4-5)}$$

kde S' je naspořená částka, budoucí hodnota anuity;
a je výše úložky, která je ukládána vždy na počátku úrokového období (roku);
n je počet úrokových období (let), ve kterých se spoří;
i je roční úroková sazba.

Výraz:

$$s''^{i}_{n} = (1+i)\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad \textbf{(4-6)}$$

se nazývá **střadatel předlhůtní** a udává, kolik ušetříme za n období při úrokové sazbě i, jestliže na počátku každého období uložíme 1 Kč.

Vztah pro výpočet naspořené částky potom můžeme zapsat jako:

$$S' = a\cdot s''^{i}_{n}. \qquad \textbf{(4-7)}$$

Z něj můžeme vyjádřit **velikost úložky** a:

$$a = \frac{S'}{s''^{i}_{n}} = \frac{S'\cdot i}{(1+i)\cdot\left[(1+i)^n - 1\right]}. \qquad \textbf{(4-8)}$$

Příklad 4-8 *Naspořená částka za více úrokových období, v každém ukládáme jednou*

Kolik uspoříme za tři roky, budeme-li ukládat na počátku každého roku 12 000 Kč při neměnné 2,5% úrokové sazbě p.a. a ročním připisování úroků?

Řešení

Pro výpočet využijeme vzorce (4-5), kde a = 12 000; i = 0,025; n = 3. Potom:

$$S' = a\cdot(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 12\,000\cdot 1{,}025\cdot\frac{1{,}025^3 - 1}{0{,}025} = 37\,830{,}19.$$

Za tři roky uspoříme 37 830,19 Kč.

Příklad 4-9 *Výše úložky pro docílení dané naspořené částky*

Za pět let plánujeme nákup nového automobilu. Značka, kterou jsme si vybrali, má dle prognóz vývoje cen stát v té době 750 000 Kč. Kolik musíme tedy spořit na počátku každého roku, abychom za pět let uspořili 750 000 Kč? Úspory dáváme na účet úročený sazbou 2,5 % p.a. s ročním připisováním úroků.

Řešení

Využijeme vzorec (4-8) a dosadíme S' = 750 000; i = 0,025; n = 5. Vypočítáme výši úložky a:

$$a = \frac{S' \cdot i}{(1+i) \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]} = \frac{750\,000 \cdot 0{,}025}{1{,}025 \cdot (1{,}025^5 - 1)} = 139\,205{,}02.$$

Počátkem každého roku je třeba spořit 139 205,02 Kč.

Bude-li úrokové období kratší než jeden rok, tj. úroky budou připisovány častěji, např. dvakrát ročně při pololetním úrokovém období, čtyřikrát ročně při čtvrtletním úrokovém období atd., bude nutno přizpůsobit úrokovou sazbu tomuto období.

Příklad 4-10 *Naspořená částka za více úrokových období kratších než rok*

Kolik uspoříme včetně úroků do konce roku, ukládáme-li počátkem každého měsíce 1 700 Kč při úrokové sazbě 2 % p.a. a měsíčním připisování úroků?

Řešení

V tomto případě se jedná o dlouhodobé předlhůtní spoření, neboť spoříme měsíčně a úrokové období je též měsíční. Všimněme si, že zadání příkladu je podobné příkladu 4-1, kde jsme použili krátkodobé spoření. Zde jsme též spořili měsíčně, ale úrokové období bylo roční.

Nyní tedy pro řešení využijeme vztah (4-5), kam dosadíme a = 1 700; n =12 (počet měsíců je počet úrokových období); i = 0,02 / 12 = 0,00167 p.m. (měsíční úroková sazba):

$$S' = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1\,700 \cdot 1{,}00167 \cdot \frac{1{,}00167^{12} - 1}{0{,}00167} = 20\,622{,}36.$$

Naspořená částka na konci roku činí 20 622,36 Kč.

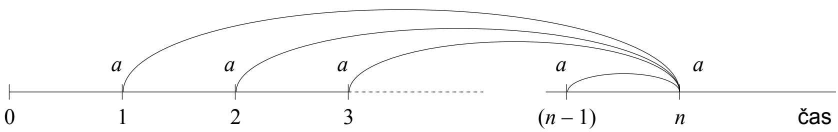
Srovnáme-li vypočtený výsledek s výsledkem příkladu 4-1, vidíme, že při měsíčním připisování úroků naspoříme částku vyšší v našem případě o 1,35 Kč.

Z výše uvedeného příkladu vyplývá, že odvozený vztah (4-5) je zcela obecný a lze jej použít pro libovolné úrokové období. Proměnná *n* obecně značí počet úrokových období, *i* je pak úroková sazba příslušná úrokovému období a a je platba (úložka), kterou ukládáme jedenkrát za úrokové období.

4.2.2 Spoření dlouhodobé polhůtní

Ukládáme-li částky na konci úrokového období, v našem případě na konci roku, mluvíme o spoření polhůtním. Naším úkolem je vypočítat, kolik uspoříme za n období, ukládáme-li na konci každého období částku a při roční úrokové sazbě i, přičemž stále předpokládáme, že úrokové období je roční, tedy že úroky jsou připisovány na konci roku (viz obr. 4.4).

Schematicky znázorníme:



Obrázek 4.4 Schéma spoření dlouhodobého polhůtního

Pro určení celkové hodnoty úspor na konci n-tého období vypočítáme hodnoty všech úložek ku konci n-tého období a sečteme je. Postup je zřejmý z tabulky 4.4.

Pořadí úložky	Počet období, po které je uložena	Celková hodnota na konci n-tého období
1	$n-1$	$a \cdot (1+i)^{n-1}$
2	$n-2$	$a \cdot (1+i)^{n-2}$
:	:	:
$n-1$	1	$a \cdot (1+i)$
n	0	a

Tabulka 4.4 Úroky z jednotlivých splátek při spoření dlouhodobém polhůtním

Pro výpočet hodnoty jednotlivých úložek na konci n-tého období jsme využili vzorec (3-1).

Konečný stav úspor S opět vypočítáme jako součet konečných hodnot jednotlivých úložek. Konečný stav úložek na konci n-tého období je dán konečnou geometrickou řadou s kvocientem $1 + i$ a prvním členem a, tedy platí:

$$S = a \cdot [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + 1].$$

Výraz v závorce je tedy opět geometrická řada, kterou sečteme podle vzorce (1-18) pro součet geometrické řady a dostaneme:

$$S = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \tag{4-9}$$

kde S je naspořená částka;
a je úložka, která je ukládána vždy na konci úrokového období (roku);
n je počet období (let) spoření;
i je roční úroková sazba.

Výraz:

$$s_n^i = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{4-10}$$

se nazývá **střadatel polhůtní** a udává, kolik ušetří osoba za n období při úrokové sazbě i, jestliže na konci každého období uloží 1 Kč.

Vzorec pro výpočet konečné hodnoty úspor potom můžeme zapsat jako:

$$S = a \cdot s_n^i. \tag{4-11}$$

Z něj můžeme vyjádřit velikost splátky a:

$$a = \frac{S}{s_n^i} = \frac{S \cdot i}{(1+i)^n - 1}. \tag{4-12}$$

Výrazy (4-10) a (4-6) pro střadatel polhůtní a střadatel předlhůtní se liší pouze faktorem $(1 + i)$.

Platí, že:

střadatel předlhůtní = (1 + i) · střadatel polhůtní.

Příklad 4-11 *Výše úložky pro docílení dané naspořené částky*

Vyjdeme ze zadání pro příklad 4-9 s tím rozdílem, že částky na nákup automobilu chceme ukládat na konci roku. Kolik tedy musíme ukládat koncem každého roku, abychom za pět let uspořili 750 000 Kč při úrokové sazbě 2,5 % p.a. a ročním úrokovém období?

Řešení:

Použijeme vzorec (4-12), kam dosadíme n = 5; S = 750 000; i = 0,025:

$$a = \frac{S \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{750\,000 \cdot 0,05}{1,025^5 - 1} = 142\,685,15.$$

Koncem každého roku budeme ukládat 142 685,15 Kč.

Částka, kterou spoříme na konci roku, je vyšší než pro příklad 4-9, kdy jsme spořili na počátku roku.

Částku, kterou je nutno spořit na konci roku, lze snadno vypočítat z částky, kterou spoříme na počátku roku, a to tak, že ji vynásobíme faktorem (1 + i). To vyplývá ze vztahu mezi střadatelem polhůtním a střadatelem předlhůtním, který je uveden výše.

Tedy pro kontrolu:

139 205,02 · (1 + 0,025) = 142 685,15 Kč.

Chceme-li spočítat dobu potřebnou pro naspoření částky S při dané úrokové sazbě i, přičemž pravidelně ukládáme částky a, vyjdeme ze vztahu (4-9), který po úpravách můžeme zapsat ve tvaru:

$$1 + S \cdot \frac{i}{a} = (1+i)^n.$$

Tuto rovnici zlogaritmujeme a pomocí vzorce (1-12) dostaneme:

$$\ln\left(1 + S \cdot \frac{i}{a}\right) = n \cdot \ln(1+i),$$

z toho:

$$n = \frac{\ln(1 + S \cdot \frac{i}{a})}{\ln(1+i)}. \qquad \textbf{(4-13)}$$

Příklad 4-12 *Doba spoření*

Za jak dlouho uspoříme 50 000 Kč při ročním polhůtním ukládání 7 000 Kč při neměnné 4% úrokové sazbě p.a.? Předpokládáme roční připisování úroků.

Řešení

Použijeme vztah (4-13) a dosadíme S = 50 000; a = 7 000; i = 0,04. Potom:

$$n = \frac{\ln(1 + S \cdot \frac{i}{a})}{\ln(1+i)} = \frac{\ln(1 + 50\,000 \cdot \frac{0,04}{7\,000})}{\ln(1,04)} = 6,4.$$

Uvedenou částku uspoříme přibližně za 6,4 roku.

Bude-li úrokové období kratší než jeden rok, např. pololetní, čtvrtletní apod., přizpůsobíme tomuto období úrokovou sazbu obdobně jako v příkladu 4-10.

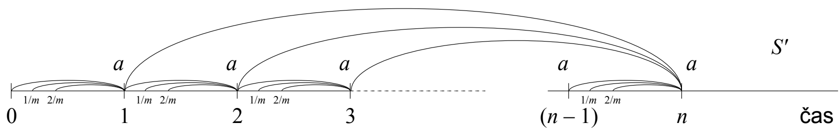
4.3 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření

Naším úkolem v této části bude zjistit, kolik uspoříme do konce n-tého období, jestliže ukládáme m-krát za úrokové období.

Tento problém rozdělíme opět podle toho, zda ukládáme na počátku nebo na konci určité části, tedy m-tiny úrokového období. Úrokové období zvolíme roční.

4.3.1 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření při spoření předlhůtním

Nyní chceme vypočítat, kolik uspoříme do konce *n*-tého roku, ukládáme-li na počátku každé m-tiny roku x Kč (viz obr. 4.5).



Obrázek 4.5 Schéma kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření předlhůtního

Nejprve vypočítáme, kolik bude činit uspořená částka z vkladů včetně úroků na konci prvního roku, což zjistíme využitím vzorce (4-2):

$$S'_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i).$$

Nyní jsme převedli naši úlohu na případ, kdy koncem roku ukládáme místo částky a, kterou jsme uvažovali u dlouhodobého spoření, částku S'_x. Tedy na konci n-tého roku bude celková naspořená částka podle vzorce (4-7), kde nahradíme částku *a* částkou S'_x, rovna:

$$S' = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad \textbf{(4-14)}$$

Pro výpočet celkové uspořené částky jsme použili střadatel polhůtní, ačkoli jednotlivé částky ukládáme na počátku každé m-tiny roku, neboť využitím vztahu (4-2) jsme získali částku S'_x, která vyjadřuje hodnotu úspor na konci roku.

Příklad 4-13 *Naspořená částka při více úložkách v úrokovém období*

Kolik uspoříme za tři roky, spoříme-li začátkem každého měsíce 1 700 Kč při neměnné 2% roční úrokové sazbě? Předpokládáme roční připisování úroků.

Řešení

Pro výpočet použijeme vzorec (4-14) a dosadíme x = 1 700; n = 3; m=12; i = 0,02. Všimněme si, že první část výpočtu jsme již provedli při řešení příkladu 4-1, a známe tedy naspořenou částku na konci roku, která činí 20 621 Kč.

$$S' = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 12 \cdot 1\,700 \cdot (1 + \frac{13}{24} \cdot 0{,}02) \cdot \frac{1{,}02^3 - 1}{0{,}02} =$$

$$= 20\,621 \cdot \frac{1{,}02^3 - 1}{0{,}02} = 63\,108{,}51.$$

Při uvedených podmínkách uspoříme 63 108,51 Kč.

Příklad 4-14 *Výše úložky ukládané vícekrát v úrokovém období*

Nyní se podívejme na příklady 4-9 a 4-11. Tentokrát nebudeme na automobil spořit ročními úložkami, ale čtvrtletními. Kolik tedy musíme spořit počátkem každého čtvrtletí, abychom za pět let uspořili 750 000 Kč při neměnné roční úrokové sazbě 2,5 % a ročním připisování úroků?

Řešení

Za jednotlivé veličiny dosadíme S' = 750 000; m = 4; n = 5; i = 0,025. Chceme vypočítat výši úložky x.

I v tomto příkladu máme již část výpočtu hotovou. Z příkladu 4-11 známe totiž částku, kterou je třeba spořit na konci roku. Z ní vypočítáme čtvrtletní úložku a postupujeme pak stejně jako v příkladu na krátkodobé spoření (viz příklad 4-2). Výsledek bude stejný jako při níže uvedeném postupu.

Neznáme-li částku, kterou je třeba spořit na konci roku, použijeme vzorec (4-14), ze kterého vyjádříme x:

$$x = \frac{S'}{m \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}} = \frac{750\,000}{4 \cdot (1 + \frac{5}{8} \cdot 0{,}025) \cdot \frac{1{,}025^5 - 1}{0{,}025}} = 35\,122{,}5.$$

Čtvrtletně je nutno ukládat 35 122,5 Kč.

Příklad 4-15 *Doba spoření*

Jak dlouho je nutno spořit počátkem každého měsíce 500 Kč, aby uspořená částka dosáhla výše 50 000 Kč při neměnné 4% roční úrokové sazbě a ročním připisování úroků?

Řešení

Pro výpočet použijeme vzorec (4-14), ze kterého vyjádříme pomocí logaritmů dobu spoření n:

$$S' = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \qquad \frac{S' \cdot i}{x \cdot m \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i)} + 1 = (1+i)^n.$$

Obě strany rovnice zlogaritmujeme a získáme:

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{S' \cdot i}{x \cdot m \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i)} + 1\right)}{\ln(1+i)}.$$

Za jednotlivé veličiny dosadíme m = 12; x = 500; i = 0,04; S' = 50 000 a dostaneme:

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{50\,000 \cdot 0{,}04}{500 \cdot 12 \cdot (1 + \frac{13}{24} \cdot 0{,}04)} + 1\right)}{\ln(1{,}04)} = 7{,}2.$$

Uvedenou částku uspoříme za 7,2 roku.

Podívejme se ještě na případ, kdy úrokové období nebude roční. V tomto případě bude nutno vypočítat nejprve naspořenou částku na konci úrokového období (viz příklad 4-7) a dále použít střadatel polhůtní, kde bude přizpůsobena jednak úroková sazba, jednak počet úrokových období.

Příklad 4-16 *Naspořená částka při připisování úroků vícekrát v roce*

Kolik naspoříme za tři roky, ukládáme-li počátkem každého měsíce 1 000 Kč při úrokové sazbě 2,8 % p.a. a čtvrtletním úrokovém období?

Řešení

Využijeme vztah (4-14):

$$S' = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Dosadíme:

x = 1 000;
m = 3 (během čtvrtletí uložíme tři částky);
i = 0,028 / 4 = 0,007 (roční úrokovou sazbu je nutno vydělit počtem úrokových období za rok a získáme čtvrtletní úrokovou sazbu);
n = 3 · 4 = 12 (tři roky po čtyřech úrokových obdobích).

$$S' = 3 \cdot 1\,000 \cdot (1 + \frac{4}{6} \cdot 0{,}007) \cdot \frac{1{,}007^{12} - 1}{0{,}007} = 3\,014 \cdot \frac{1{,}007^{12} - 1}{0{,}007} = 37\,593{,}48.$$

Za tři roky naspoříme částku 37 593,48 Kč.

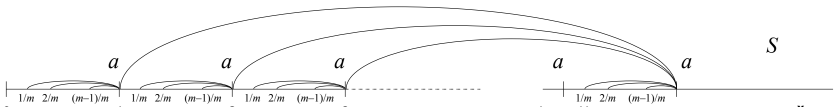
4.3.2 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření při spoření polhůtním

Budeme postupovat obdobně jako v předchozím oddílu. Předpokládáme nejprve roční úrokové období. Chceme vypočítat, kolik uspoříme do konce n-tého roku, ukládáme-li na konci každé m-tiny roku x Kč.

Nejprve počítáme, kolik bude činit uspořená částka z vkladů včetně úroků na konci prvního roku, což zjistíme využitím vzorce (4-4):

$$S_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i).$$

Schematicky je možno znázornit:



Obrázek 4.6 Schéma kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření polhůtního

Tím jsme převedli naši úlohu na případ, kdy koncem roku ukládáme místo částky a, uváděné ve vzorci (4-11) částku S_x. Tedy na konci n-tého roku bude celková úspora podle vzorce (4-11) rovna:

$$S = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad \textbf{(4-15)}$$

Pro výpočet celkové uspořené částky jsme opět použili středatel polhůtní.

Příklad 4-17 *Naspořená částka při pololetním připisování úroků*

Kolik budeme mít k dispozici na účtu na konci roku, jestliže jsme na počátku roku uložili částku 10 000 Kč a koncem každého měsíce spoříme na tento účet 1 000 Kč? Úroková sazba je 2,5 % p.a. s pololetním připisováním úroků.

Řešení

Řešení rozdělíme na dvě části:

1. spočítáme budoucí hodnotu částky 10 000 Kč podle vztahu (3-2), kam dosadíme K_0 = 10 000; i = 0,025; m = 2; n = 1:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^{m \cdot n} = 10\,000 \cdot (1 + \frac{0{,}025}{2})^2 = 10\,251{,}56.$$

2. spočítáme naspořenou částku podle vztahu (4-15), kde m = 6 (počet úložek v jednom úrokovém období), x = 1 000, i = 0,025 / 2 = 0,0125 p.s. (pololetní úroková sazba), n = 2 (počet pololetí v jednom roce):

$$S = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 6 \cdot 1\,000 \cdot (1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}0125) \cdot \frac{(1{,}0125^2 - 1)}{0{,}0125} =$$

$$= 6\,031{,}25 \cdot \frac{(1{,}0125^2 - 1)}{0{,}0125} = 12\,137{,}89.$$

Celkem budeme mít na účtu součet naspořené částky S a zúročené částky K_n, tj.:

10 251,56 + 12 137,89 = 22 389,45 Kč.

4.3.3 Komplexnější příklady

Příklad 4-18 *Výpočet úrokové sazby při spoření*

Spoříme pravidelně vždy počátkem čtvrtletí na účet s pololetním připisováním úroků. Po 3 letech máme naspořeno 585 000 Kč, na konci 3. roku z této částky vybereme 90 000 Kč a po 6 letech bude stav účtu 1 158 000 Kč. Jakou roční úrokovou sazbou je úročen daný účet?

Řešení

Příklad se zdá být na první pohled neřešitelný, protože neznáme dvě proměnné – úložku a úrokovou sazbu (x a i). Všechna známá fakta zapíšeme formou soustavy 2 rovnic. První rovnice se týká spoření za první čtyři roky. Druhá rovnice se týká dalších dvou let a skládá se ze zůstatku po prvních čtyřech letech (který se stále úročí) a spoření za další dva roky.

Pro první rovnici vyjdeme ze vztahu (4-14)

$$S' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

$$2 \cdot x \cdot \left(1 + \frac{2+1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{i}{2}\right) \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{2}\right)^6 - 1}{\frac{i}{2}} = 585\,000.$$

Úrokovou sazbu jsme přizpůsobili pololetnímu úrokovému období, proto je vydělena dvěma. Vzhledem k tomu, že spoříme čtvrtletně, je počet úložek za úrokové období m roven dvěma.

Pro sestavení druhé rovnice využijeme vztah pro složené úročení (3-2) a dále pak vztah (4-14) pro spoření

$$(585\,000-90\,000)\cdot\left(1+\frac{i}{2}\right)^6+2\cdot x\cdot\left(1+\frac{2-1}{2\cdot 2}\cdot\frac{i}{2}\right)\cdot\frac{\left(1+\frac{i}{2}\right)^6-1}{\frac{i}{2}}=1\,158\,000.$$

Máme dvě rovnice o dvou neznámých, které vyřešíme např. tak, že odečteme první rovnici od druhé:

$$(585\,000-90\,000)\cdot\left(1+\frac{i}{2}\right)^6=1\,158\,000-585\,000.$$

$$495\,000\cdot\left(1+\frac{i}{2}\right)^6=573\,000.$$

$$i=0{,}0494.$$

Dosazením např. do 1. rovnice za „i“ bychom mohli určit též výši pravidelné úložky.

Účet je úročen úrokovou sazbou 4,94 % p.a.

Příklad 4-19 *Výpočet úrokové sazby při spoření*

Při jaké roční úrokové míře s pololetním připisováním úroků spořil klient pravidelně na konci každého čtvrtletí po dobu 6 let, víme-li, že po 4 letech má naspořeno 300 000 Kč, současně na konci 4. roku vybere z této naspořené částky 100 000 Kč a po 6 letech bude stav jeho účtu 400 000 Kč?

Řešení

Příklad je obdobný příkladu 4-18, je však náročnější řešení soustavy rovnic.

Nejprve zapíšeme obě rovnice:

$$X\cdot 2\cdot\left(1+\frac{2-1}{2\cdot 2}\cdot\frac{i}{2}\right)\cdot\frac{\left(1+\frac{i}{2}\right)^8-1}{\frac{\mathrm{i}}{2}}=300\,000.$$

$$200\,000 \cdot \left(1+\frac{i}{2}\right)^4 + X \cdot 2 \cdot \left(1+\frac{2-1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{i}{2}\right) \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{2}\right)^4 - 1}{\frac{\mathrm{i}}{2}} = 400\,000.$$

Z první rovnice vyjádříme:

$$X \cdot 2 \cdot \left(1+\frac{2-1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{i}{2}\right) = \frac{300\,000 \cdot \frac{\mathrm{i}}{2}}{\left(1+\frac{i}{2}\right)^8 - 1}$$

a dosadíme do 2. členu 2. rovnice:

$$200\,000 \cdot \left(1+\frac{i}{2}\right)^4 + \frac{300\,000 \cdot \frac{i}{2}}{\left(1+\frac{i}{2}\right)^8 - 1} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{2}\right)^4 - 1}{\frac{i}{2}} = 400\,000,$$

poté 2. člen upravíme následovně dle vzorce $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$200\,000 \cdot \left(1+\frac{i}{2}\right)^4 + \frac{300\,000 \cdot i}{2 \cdot \left(\left(1+\frac{i}{2}\right)^4 - 1\right) \cdot \left(\left(1+\frac{i}{2}\right)^4 + 1\right)} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{2}\right)^4 - 1}{\frac{i}{2}} = 400\,000,$$

pokrátíme:

$$200\,000 \cdot \left(1+\frac{i}{2}\right)^4 + \frac{300\,000}{\left(1+\frac{i}{2}\right)^4 + 1} = 400\,000,$$

provedeme **substituci** $y = \left(1+\frac{i}{2}\right)^4$:

$$200\,000 \cdot y + \frac{300\,000}{y+1} = 400\,000,$$

celou rovnici vynásobíme $\frac{y+1}{100\,000}$:

$$2y^2 + 2y + 3 = 4y + 4.$$
$$2y^2 - 2y - 1 = 0.$$
$$Y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+2}}{2} = 1{,}366025404.$$

Druhé řešení je záporné a nemá smysl, protože z rovnice substituce $y = \left(1 + \frac{i}{2}\right)^4$ je zjevné, že y musí být kladné.

Výsledek dosadíme zpět do rovnice substituce a odmocníme:

$$\sqrt[4]{1{,}366025404} = 1 + \frac{i}{2}.$$
$$i = 0{,}1622.$$

Spoříme při úrokové sazbě 16,22 % p.a.

Příklad 4-20 *Počáteční vklad v kombinaci se spořením*

Jakou částku jsme měli uloženou na účtu k 1. 1. 2006, jestliže na konci roku 2013 budeme disponovat částkou 2 350 000 Kč? Účet je úročen úrokovou sazbou 3,4 % p.a. s ročním připisováním úroků a vždy počátkem měsíce ukládáme pravidelně 5 000 Kč. Úroky jsou daněny 15% srážkovou daní.

Řešení

Spoříme po dobu 8 let (1. 1. 2006 až 31. 12. 2013) a zároveň se původní vklad úročí. Součet obou budoucích hodnot jak částky na účtu k 1. 1. 2016, tak následných pravidelných úspor k 31. 12. 2013 činí 2 350 000 Kč.

Původní vklad vypočteme diskontováním rozdílu celkové budoucí hodnoty a naspořené částky (převedeme budoucí hodnotu původního vkladu na hodnotu současnou).

Celkem naspoříme dle vztahu (4-14):

$$S = 5000 \cdot 12 \cdot \left(1 + \frac{12+1}{2 \cdot 12} \cdot 0{,}034 \cdot 0{,}85\right) \cdot \frac{(1+0{,}034 \cdot 0{,}85)^8 - 1}{0{,}034 \cdot 0{,}85} = 539781{,}66.$$

Na účtu bude k 31. 12. 2013 částka 2 350 000 Kč tvořená součtem naspořené částky za 8 let ve výši 539 781,66 Kč a původní částky K_0, která byla na účtu k 1. 1. 2006. Částka K_0 byla úročena po celou dobu pomocí složeného úročení.

Ze známých skutečností získáme rovnici

$$2\,350\,000 = K_0 \cdot (1+0{,}034 \cdot 0{,}85)^8 + 539\,781{,}66.$$

$$K_0 = \frac{2\,350\,000 - 539\,781{,}66}{(1+0{,}034 \cdot 0{,}85)^8} = 1\,441\,270{,}916.$$

K 1. 1. 2006 jsme museli mít na účtu vloženo 1 441 270,92 Kč.

Příklad 4-21 *Snížení úrokové sazby v průběhu spoření, změna úložky*

Spoříme koncem čtvrtletí 10 000 Kč po 20 let při 5 % p.a. a ročním úročení. Na konci 10. roku banka sníží úrokovou sazbu na 3 % p.a. O kolik se musí zvýšit pravidelná úložka, aby se naspořená částka nezměnila?

Řešení

Pro řešení příkladu využijeme vztah pro kombinované spoření (4-15):

$$S = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Řešení rozdělíme do tří kroků, nejprve vypočítáme, jakou bychom naspořenou částku za 20 let, kdyby nedošlo ke změně úrokové sazby, dále pak zjistíme, kolik naspoříme za deset let při původní úrokové sazbě.

V posledním kroku sestavíme rovnici, z které vypočítáme výši úložky po změně úrokové sazby.

1. Naspořená částka po 20 letech, kdyby nedošlo ke snížení úrokové sazby:

$$S_{20} = 4 \cdot 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{4-1}{2 \cdot 4} \cdot 0{,}05\right) \cdot \frac{(1+0{,}05)^{20} - 1}{0{,}05} = 1\,347\,438.$$

2. Naspořená částka po 10 letech (do data snížení i):

$$S_{10} = 4 \cdot 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{4-1}{2 \cdot 4} \cdot 0{,}05\right) \cdot \frac{(1+0{,}05)^{10} - 1}{0{,}05} = 512\,549.$$

3. Sestavení rovnice

Naspořená částka po 20 letech S_{20} (1 347 438) se musí rovnat součtu naspořené částky po deseti letech při původní úrokové sazbě S_{10} (512 549), která se zbylých deset let složeně úročí při snížené sazbě a naspořené částky s vyšší úložkou „X“ za dalších deset let při snížené sazbě:

$$1\,347\,438 = 512\,549 \cdot (1+0{,}03)^{10} + x \cdot 4 \cdot \left(1 + \frac{4-1}{2 \cdot 4} \cdot 0{,}03\right) \cdot \frac{(1+0{,}03)^{10} - 1}{0{,}03}.$$

$$x = 14\,203.$$

Musíme ukládat o 4 203 Kč více, aby naspořená částka byla stejná jako v případě, že by nedošlo ke změně úrokové sazby.

Příklad 4-22 *Započtení poplatku za vedení účtu do naspořené částky*

Spoříme 10 let vždy koncem měsíce 1 000 Kč při úrokové sazbě 7 % p.a. a pololetním připisování úroků. Jaká bude naspořená částka, když banka strhává na konci každého úrokového období poplatek ve výši 200 Kč a úroky jsou zdaněny srážkou u zdroje ve výši 15 %?

Řešení

Poplatky můžeme zakomponovat přímo do vztahu pro výpočet naspořené částky, ale můžeme je rovněž vypočítat zvlášť. Chceme-li je spočítat zvlášť, nejprve od nich abstrahujeme a spočítáme naspořenou částku bez poplatků (S_{20A}) a pak v další rovnici spoření spočítáme budoucí hodnotu poplatků (S_{20P}), kterou od naspořené částky odečteme (stržením poplatků strháváme i potenciální úroky z nich, a proto používáme vzorec pro spoření, který nám určí budoucí hodnotu poplatků včetně úroků, tj. o kolik peněz jsme vlivem poplatků celkově přišli.

$$S_{20\mathrm{A}} = 6 \cdot 1\,000 \cdot \left(1 + \frac{6-1}{2 \cdot 6} \cdot \frac{0,07}{2} \cdot 0,85\right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,07}{2} \cdot 0,85\right)^{20} - 1}{\frac{0,07}{2} \cdot 0,85} = 162\,806.$$

$$S_{20\mathrm{P}} = 200 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,07}{2} \cdot 0,85\right)^{20} - 1}{\frac{0,07}{2} \cdot 0,85} = 5\,360.$$

$$S_{20} = S_{20\mathrm{A}} - S_{20\mathrm{P}} = 162\,806 - 5\,360 = 157\,446.$$

Nebo můžeme poplatky zakomponovat přímo do vzorce pro spoření. Strhne-li banka poplatek na konci úrokového období, je to totéž, jakoby se nám snížila naspořená částka na konci úrokového období. Poplatek se tedy projeví v části vztahu, který se týká krátkodobého spoření:

$$S_{20} = \left[6 \cdot 1\,000 \cdot \left(1 + \frac{6-1}{2 \cdot 6} \cdot \frac{0,07}{2} \cdot 0,85\right) - 200\right] \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,07}{2} \cdot 0,85\right)^{20} - 1}{\frac{0,07}{2} \cdot 0,85} = 157\,446.$$

Naspořená částka činí 157 446 Kč.

Příklad 4-23 *Započtení poplatku za vedení účtu do naspořené částky, poplatek není účtován v úrokovém období*

Spoříme 10 let vždy koncem měsíce 1 000 Kč při 7 % p.a. a pololetním připisování úroků. Jaká bude naspořená částka, když banka strhává na konci každého roku poplatek ve výši 400 Kč a úroky jsou zdaněny srážkou u zdroje ve výši 15 %?

Řešení

Zadání je velice podobné jako u předchozího příkladu, nicméně problém je v tom, že neznáme velikost poplatku strženého na konci úrokového období. Proto jej musíme napřed vypočítat. Použijeme opět vzorec pro spoření, protože 400 Kč na konci roku lze vyjádřit jako naspořenou hodnotu 2 úložek x ukládaných vždy ke konci úrokového období (pololetí):

$$400 = X \cdot \frac{\left(1+\frac{0,07}{2}\cdot 0,85\right)^{2}-1}{\frac{0,07}{2}\cdot 0,85}.$$

$$X = 197.$$

Budoucí hodnota poplatků je:

$$S_{20\mathrm{P}} = 197 \cdot \frac{\left(1+\frac{0,07}{2}\cdot 0,85\right)^{20}-1}{\frac{0,07}{2}\cdot 0,85} = 5\,280.$$

Naspořená částka při abstrahování poplatků je stejná jako v předchozím příkladu, a proto můžeme psát:

$$S_{20} = S_{20\mathrm{A}} - S_{20\mathrm{P}} = 162\,806 - 5\,280 = 157\,526.$$

Ekvivalentní řešení

Výše uvedený postup si můžeme zjednodušit tím, že zakomponujeme přepočtený poplatek (ke konci úrokového období) přímo do vzorce:

$$S_{20} = \left[6\cdot 1\,000\cdot\left(1+\frac{6-1}{2\cdot 6}\cdot\frac{0,07}{2}\cdot 0,85\right)-197\right]\cdot\frac{\left(1+\frac{0,07}{2}\cdot 0,85\right)^{20}-1}{\frac{0,07}{2}\cdot 0,85} = 157\,526.$$

Naspořená částka činí 157 526 Kč.

Shrnutí:

Všechny výše uvedené vztahy lze vyjádřit jediným níže uvedeným obecným výrazem

$$S = m\cdot x\cdot(1+\frac{m\pm 1}{2\cdot m}\cdot i)\cdot\frac{(1+i)^{n}-1}{i},$$

kde S je naspořená částka,
x je úložka, která je ukládána na začátku či na konci úrokového období,
m je počet úložek za jedno úrokové období,
n je počet období spoření,
i je úroková sazba, která se vztahuje k úrokovému období.

Znaménko + v čitateli prvního zlomku použijeme pro spoření předlhůtní a znaménko – pro spoření polhůtní.

Bude-li m = 1, přejde výraz ve vztah (4-5) pro znaménko +, tj. výraz pro spoření dlouhodobé předlhůtní;
ve vztah (4-9) pro znaménko –, tj. výraz pro spoření dlouhodobé polhůtní.

Bude-li n = 1, přejde výraz ve vztah (4-2) pro znaménko +, tj. výraz pro spoření krátkodobé předlhůtní;
ve vztah (4-4) pro znaménko –, tj. výraz pro spoření krátkodobé polhůtní.

4.3.3 Stavební spoření

Praktickou aplikací výše uvedených postupů výpočtu budoucí hodnoty pravidelných plateb je stavební spoření, což již bylo ukázáno i v příkladech 4-1 a 4-3. **Charakteristickým rysem** tohoto žádaného produktu je spojení dvou fází, a to fáze spoření a fáze poskytnutí a splácení úvěru. Provozovatelem stavebního spoření může být pouze banka, která má k tomu zvláštní licenci na základě zákona o stavebním spoření – stavební spořitelna.

Mezi **hlavní cíle** stavebního spoření, které jeho účastníci sledují, můžeme zařadit:

- výhodné a bezpečné uložení peněžních prostředků;
- získání úrokově zvýhodněného úvěru na financování bytových potřeb.

Účastníci mohou tedy stavební spoření využívat primárně s cílem získat poměrně výhodný úvěr, mohou je však zvolit i ti, jejichž cílem je pouze výhodné uložení peněz, neboť úrok poskytovaný stavební spořitelnou spolu se státní podporou představuje výhodné zhodnocení úspor.

Účastníkem stavebního spoření může být:

- **fyzická osoba** s trvalým pobytem na území České republiky (v případě občanů EU stačí povolení k pobytu) a s rodným číslem přiděleným orgánem České republiky – může to tedy být i osoba nezletilá a smlouvu o stavebním spoření v takovém případě podepisuje zákonný zástupce; výnosy ze stavebního spoření fyzických osob mohou být osvobozeny od daně z příjmu;
- **právnická osoba** se sídlem na území České republiky a s identifikačním číslem, přiděleným orgánem České republiky. Právnické osoby nemají nárok na státní podporu a jejich výnosy ze stavebního spoření jsou zdaňovány podle platných předpisů.

Smlouva o stavebním spoření se uzavírá na tzv. **cílovou částku,** která zahrnuje:

- vklady ze stavebního spoření včetně připsaných úroků z nich;
- státní podporu a úroky z ní;
- hodnotu poskytnutého úvěru ze stavebního spoření, pokud účastník bude tento úvěr požadovat. Je to rozdíl mezi cílovou částkou a uspořenou částkou se státní podporou. Přitom uspořená částka se státní podporou musí zpravidla činit minimálně 40 % cílové částky.

Cílovou částku volí účastník stavebního spoření s ohledem na následující hlediska:

- snaha o získání prostředků v požadované výši – jestliže účastník preferuje toto hledisko, nebude zřejmě klást důraz na výši limitu státní podpory;
- snaha o maximální výši státní podpory – v tomto případě bude účastník vycházet z roční úspory (včetně úroků) 20 000 Kč, při níž lze získat maximální státní podporu, neboť vyšší úspory by při preferenci tohoto kritéria byly neefektivní;
- finanční situace účastníka. Zde je nutno brát v úvahu, jak vysokou částku je možno na stavební spoření uvolnit.

Státní podpora se poskytuje ze státního rozpočtu formou záloh účastníkům, kteří splní zákonné podmínky. Státní podpora činí 10 % ročně uspořené částky včetně úroků, maximálně však 2 000 Kč, což je podpora z částky 20 000 Kč. Částka přesahující 20 000 Kč se pro přiznání podpory převádí do následujícího roku.

Úroková sazba z vkladů je obvykle 2 % p.a. Některé stavební spořitelny nabízejí zvýhodnění v případě nečerpání úvěru. Úroková sazba z úvěru poskytnutého v rámci stavebního spoření je maximálně o 3 % vyšší než ve fázi spořicí a je pevná po celou dobu splácení úvěru.

Úvěr ze stavebního spoření je účelový úvěr na řešení bytových potřeb a je poskytován stavební spořitelnou po ukončení doby spoření za zvýhodněnou úrokovou sazbu.

Bytové potřeby, na jejichž řešení je úvěr ze stavebního spoření poskytován, jsou dány zákonem. Jedná se zejména o:

- získání bytu;
- výstavbu nebo koupi stavby na bydlení;
- získání stavebního pozemku;
- změnu, modernizaci a údržbu bytu nebo stavby pro bydlení;
- stavební úpravu nebytového prostoru na byt;
- splacení členského vkladu nebo podílu v právnické osobě, je-li členství spojeno s nájmem bytu.

V případě, že osoba potřebuje financovat bytovou potřebu v průběhu čekací doby na poskytnutí úvěru ze stavebního spoření, má možnost využít **překlenovací úvěr,** který je však úročen běžnou úrokovou sazbou.

Příklad 4-24 *Stavební spoření – státní podpora*

Klient bude spořit pravidelně koncem každého měsíce 800 Kč při roční úrokové sazbě 2 % p.a. Na jak vysokou státní podporu má nárok? Poplatky za vedení účtu neuvažujeme. Úroky jsou zdaněny srážkovou daní 15 %.

Řešení

Nejprve podle vztahu (4-4) vypočítáme uspořenou částku na konci roku. Dosadíme m = 12; x = 800; i = 0,02 · 0,85 = 0,017.

$$S_x = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) = 12 \cdot 800 \cdot (1 + 11/24 \cdot 0{,}017) = 9\,674{,}80.$$

Klient naspoří do konce roku 9 674,80 Kč.

Státní podpora činí 10 % z výše uvedené částky, tedy 0,10 · 9 674,80 = = 967,48 Kč.

Státní podpora bude v tomto případě činit 967,48 Kč.

Příklad 4-25 *Stavební spoření – uspořená částka*

Kolik uspoří účastník stavebního spoření za šest let, bude-li spořit koncem každého měsíce pravidelně 800 Kč při úrokové sazbě 2 % p.a.? Neuvažujeme poplatky za vedení účtu ani jiná zvýhodnění. Úroky z úspor i státní podpory jsou zdaněny srážkovou daní 15 %.

Řešení

Částky, které jsou rozhodné pro příslušné propočty, jsou uvedeny v tabulce 4.5.

Pro ilustraci vysvětlíme postup výpočtu pro třetí rok spoření. Částku ve sloupci 4, tedy kolik bude mít klient uspořeno včetně úroků na konci každého roku, budeme počítat podle vztahu (4-15), kam pro třetí rok spoření dosadíme m = 12 (počet úložek v jednom úrokovém období); x = 800; i = 0,03; n = 3:

$$S = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} =$$
$$= 12 \cdot 800 \cdot (1 + 11/24 \cdot 0{,}017) \cdot (1{,}017^3 - 1)/0{,}017 = 29\,520{,}61.$$

Ve sloupci 5 je uvedena částka, kterou máme na účtu na konci každého roku a která je složena z našich zhodnocených úspor (sloupec 4), dále ze státní podpory, která byla připsána k 1. 4. následujícího roku a dále z úroku ze státní podpory.

Pro třetí rok je tedy částka ve sloupci 5 složena z následujících dílčích částek:

- naspořená částka do konce třetího roku, což je 29 520 Kč, vypočtena podle vztahu (4-14);
- státní podpora uvedená ve sloupci 7 tabulky ve výši 1 081,01, vypočítána jako 10 % z částky pro výpočet státní podpory (uvedena ve sloupci 6 v řádku 2);

- úrok ze státní podpory, který je počítán po dobu tří měsíců z částky 968,48 (státní podpora za první rok) a po dalších 9 měsíců z částky 1 081,01, která byla za předchozí (druhý) rok připsána až k 1. 4. sledovaného roku.

  Je počítán dle vztahu (2-2).

Sloupec 6 tabulky uvádí pro každý rok částku rozhodnou pro výpočet státní podpory.

Pro třetí rok se částka rozhodná pro výpočet státní podpory skládá z:

- rozdílu 29 520,61 (sloupec 4) – 19 514,07, což jsou částky uspořené včetně úroků klientem do konce aktuálního (třetího) a předchozího druhého roku;
- úroku z připsané státní podpory, který je uveden ve sloupci 9 tabulky a činí 29,01;
- Tedy pro třetí rok se státní podpora počítá z částky 10 035,55.

Z tabulky 4.5 je patrné, že klient do konce 6. roku naspoří celkem 65 673,18 Kč, což je uvedeno v posledním řádku 5. sloupce tabulky.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
rok	**měsíční vklad**	**roční vklad**	**uspořeno včetně úroků**	**uspořeno včetně úroků, státní podpory a úroků z ní**	**částka pro výpočet státní podpory**	**státní podpora v příslušném roce**	**státní podpora celkem**	**úrok ze státní podpory do konce následujícího roku**
1	800	9600	9684,80	9684,80	9684,80	968,48	968,48	12,35
2	800	9600	19514,07	20494,90	9841,62	984,16	1952,64	29,01
3	800	9600	29520,61	31502,26	10035,55	1003,56	2956,20	45,99
4	800	9600	39697,26	42699,45	10222,64	1022,26	3978,46	63,29
5	800	9600	50046,91	54088,66	10412,94	1041,29	5019,75	80,91
6	800	9600	60572,51	65673,18	10606,51	1060,65	6080,41	98,86

Tabulka 4.5 Stavební spoření při pravidelné úložce ve výši 800 Kč

V případě, že bychom uvažovali poplatek za vedení účtu stavebního spoření ve výši 300 Kč po dobu 6 let, sníží se naspořená částka následujícím způsobem:

Jednotlivé poplatky jsou strhávány z účtu koncem každého roku a jejich celková výše se vypočítá dosazením podle vztahu (4-9) pro budoucí hodnotu anuity:

$$S = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 300 \cdot \frac{(1+0,02)^6 - 1}{0,02} = 1\,892,44.$$

Na základě výše uvedeného propočtu poplatků se sníží celkově naspořená částka za 6 let o částku 1 892,44 Kč, tedy na částku 68 453,92 Kč.

Tím dochází i ke snížení vnitřního výnosového procenta (výnosnosti) stavebního spoření, jak je uvedeno v části 3.4.

5. Důchody jako pravidelné platby z investice

Důchodem rozumíme pravidelné platby ve stejné výši, které obvykle nazýváme **anuity** (výplaty důchodu) a budeme je označovat a. V našem textu budeme anuitou rozumět výplatu (realizovanou platbu) důchodu. Anuity mají stejnou výši a jsou placeny pravidelně.

Někdy je možno se setkat též s přístupem, že anuita je chápána jako série plateb. Terminologie tedy není jednotná.

Podle toho, kdy jsou anuity placeny, rozlišujeme důchod:

- **předlhůtní** (anuity jsou placeny vždy na počátku určitého časového intervalu);
- **polhůtní** (anuity jsou placeny vždy na konci určitého časového intervalu).

Pro začátek budeme předpokládat, že úrokové období a interval k výplatě důchodů je stejný.

Podle toho, jak dlouho se důchod bude vyplácet, rozlišujeme důchod:

- **dočasný** (důchod je vyplácen jen po určitou, pevně stanovenou dobu);
- **věčný** (je vyplácen neomezeně dlouho).

Začne-li se s výplatou důchodu nyní, mluvíme o důchodu **bezprostředním,** začne-li jeho výplata až po uplynutí určité doby, mluvíme o důchodu **odloženém.**

V souvislosti s důchody budeme počítat:

- **počáteční (současnou) hodnotu důchodu** D, což je součet současných hodnot všech v budoucnu realizovaných plateb důchodu – udává, kolik si musíme dnes uložit, abychom si zajistili při dané úrokové sazbě vyplácení příslušných výplat důchodu (anuit) po danou dobu;
- **konečnou (budoucí) hodnotu důchodu** S, což je součet všech výplat důchodu, přepočtených ke konci posledního roku, kdy se důchod vyplácí. Konečná hodnota důchodu tedy udává, kolik bychom celkem získali ke konci posledního roku, kdybychom všechny výplaty

důchodu okamžitě po jejich vyplacení při dané úrokové sazbě uložili (investovali se stejným úrokem). Konečná hodnota důchodu je tedy stejná jako naspořená částka.

Podle vztahu (3-7) vypočítáme současné (diskontované) hodnoty jednotlivých výplat důchodu a, tyto hodnoty sečteme a tím získáme počáteční hodnotu důchodu D.

Konečná hodnota důchodu S bude sumou úročených výplat důchodu a. Vypočteme ji podle vztahu (4-5), resp. (4-9) v závislosti na tom, zda výplaty jsou prováděny předlhůtně nebo polhůtně.

Mezi počáteční a konečnou hodnotou důchodu platí vztah:

$$S = D \cdot (1+i)^n, \tag{5-1}$$

kde S je budoucí hodnota důchodu;
D je současná hodnota důchodu;
i je roční úroková sazba (uvažujeme roční úrokové období);
n je počet úrokových období (let), ve kterých dochází k výplatě anuit.

Ze vztahu (5-1) vyplývá, že budoucí hodnotu důchodu můžeme vyjádřit jako naspořenou částku pomocí vztahu (4-9)

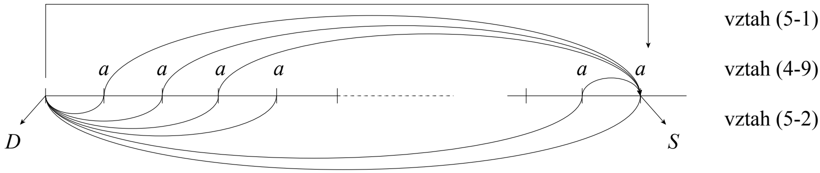
$$S = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Dosadíme-li tento vztah nyní do vztahu (5-1), dostaneme

$$a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = D \cdot (1+i)^n$$

a můžeme vyjádřit D – současnou hodnotu důchodu, kterou odvodíme ještě pomocí součtu geometrické řady v části 5.1.1

$$D = a \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}. \tag{5-2a}$$

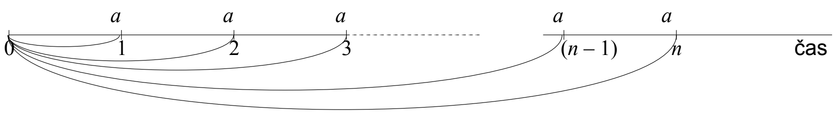


5.1 Důchod bezprostřední

U důchodu bezprostředního začíná výplata hned v daném období. Podle toho, zda se budou jednotlivé výplaty důchodu vyplácet na počátku nebo na konci období, rozlišíme důchod **bezprostřední předlhůtní** a **důchod bezprostřední polhůtní.**

5.1.1 Důchod bezprostřední polhůtní

Naším úkolem bude vypočítat počáteční hodnotu důchodu D, budeme-li vždy koncem úrokového období získávat jednotlivé platby (anuity) a po n období při úrokové sazbě i. Počáteční hodnota D se rovná součtu současných hodnot všech výplat k výchozímu datu (viz obr. 5.1).



Obrázek 5.1 Schéma důchodu bezprostředního polhůtního

Pořadí výplaty	Současná hodnota
1	$a \cdot v$
2	$a \cdot v^2$
3	$a \cdot v^3$
:	:
n	$a \cdot v^n$

Tabulka 5.1 Výpočet jednotlivých výplat důchodu bezprostředního polhůtního

Současnou hodnotu každé výplaty důchodu (anuity) vypočítáme podle vzorce (3-7) tak, že výplatu diskontujeme k výchozímu datu. Postup je zachycen v tabulce 5.1, kde $v = 1 / (1 + i)$ je diskontní faktor definovaný vztahem (3-8).

Součet všech současných hodnot výplat důchodu je dán součtem konečné geometrické řady (kde první člen řady $a_1 = a \cdot v$ a kvocient $q = v$), která nám dává počáteční hodnotu důchodu D. Pro součet současných hodnot výplat důchodu využijeme vzorec (1-18) pro součet geometrické řady a získáme:

$$D = a \cdot \frac{1 - v^n}{i} \quad \text{nebo} \quad D = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \tag{5-2}$$

kde D je počáteční (současná) hodnota důchodu;
a je pravidelná platba (anuita);
i je roční úroková sazba;
n je počet období (let – uvažujeme roční úrokové období), v kterých jsou placeny anuity;
v je diskontní faktor.

Výraz

$$a_n^i = \frac{1 - v^n}{i} \tag{5-3}$$

se nazývá **zásobitel polhůtní** a udává počáteční hodnotu jednotkové důchodové platby, vyplácené vždy koncem úrokového období po n období při úrokové sazbě i.

Ze vztahu (5-1) mezi počáteční a konečnou hodnotou důchodu vyplývá též vztah mezi střadatelem polhůtním, který je dán vztahem (4-10), a zásobitelem polhůtním, který je dán vztahem (5-3). Platí:

$$s_n^i = a_n^i \cdot (1+i)^n,$$

kde s_n^i je střadatel polhůtní – viz vztah (4-10);
a_n^i je zásobitel polhůtní;
i je roční úroková sazba;
n je počet období, v nichž je vyplácena anuita (nyní počet let).

Z uvedeného vyplývá, že naspořenou částku, ukládáme-li pravidelně polhůtně částky ve výši a, je možno spočítat jednak podle vztahu (4-10) pomocí střadatele a jednak podle vztahu (5-1) pomocí zásobitele a úrokovacího faktoru.

Vztah (5-1) $S = D \cdot (1 + i)^n$ lze napsat též ve tvaru, kde využijeme střadatel, zásobitel a uvedený úročitel.

Podle vztahu (5-2) lze současnou hodnotu důchodu vyjádřit $D = a \cdot a^i_n$.

Podle vztahu (4-11) lze budoucí hodnotu úspor vyjádřit $S = a \cdot s^i_n$,

kde s^i_n je střadatel polhůtní;
a^i_n je zásobitel polhůtní;
S je naspořená částka, budoucí hodnota anuity;
D je současná hodnota důchodu;
a je pravidelná platba.

Pak tedy vztah (5-1) přepíšeme

$$a \cdot s^i_n = a \cdot a^i_n \cdot (1 + i)^n.$$

Příklad 5-1 *Současná hodnota investice s pravidelnými ročními výnosy*

Kolik budeme ochotni zaplatit za investici, jejíž životnost je dvacet let a koncem každého roku nám z ní plyne platba ve výši 16 000 Kč? Uvažujeme roční úrokovou sazbu 5 % p.a.

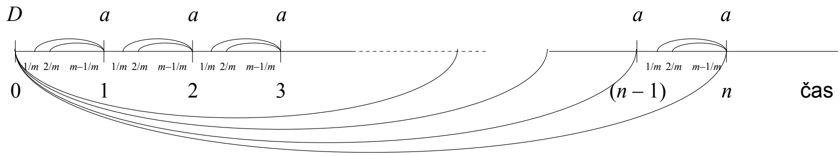
Řešení

Zde se jedná o výpočet současné hodnoty polhůtního důchodu. Je to cena, kterou jsme ochotni zaplatit za to, že budeme ročně získávat platby ve výši a, požadujeme-li výnosnost (úrokovou sazbu) i. Dosadíme a = 16 000; n = 20; i = 0,05. Použijeme vzorec (5-2):

$$D = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 16\,000 \cdot \frac{1-1{,}05^{-20}}{0{,}05} = 199\,395{,}37.$$

Investujeme-li dnes částku 199 395,37 Kč, zajistí nám výplaty pravidelných částek (anuit) podle požadovaných parametrů.

Podobně jako u spoření může docházet k tomu, že splátky důchodu jsou vypláceny častěji než jedenkrát v úrokovém období (v našem případě je roční). Budeme nyní předpokládat, že na konci každé m-tiny roku jsou vypláceny splátky důchodu ve výši x Kč. Pro výpočet počáteční hodnoty takového důchodu použijeme vzorec (5-2) s tím, že nejprve musíme vypočítat, jaká bude celková hodnota výplat důchodu na konci roku. Použijeme k tomu vztah (4-4) pro krátkodobé polhůtní spoření. Částku a ve vztahu (5-2) nahradíme částkou S_x ze vztahu (4-4). Tím jsme nahradili m výplat důchodu ve výši x Kč jednou výplatou důchodu ve výši S_x Kč na konci úrokového období (roku) – viz obr. 5.2.



Obrázek 5.2 Schéma výpočtu počáteční hodnoty důchodu

Počáteční (současná) hodnota důchodu se tedy vypočte:

$$D = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{1 - v^n}{i}, \qquad \textbf{(5-4)}$$

kde D je současná (počáteční) hodnota důchodu;
m je počet stejných částí úrokového období (roku);
x je výše pravidelné platby (v rámci úrokového období je jich m);
i je roční úroková sazba;
v je diskontní faktor daný vztahem (3-8);
n je počet úrokových období (let) – v každém z nich je vyplaceno m plateb.

Zde je třeba si uvědomit, že počáteční hodnota ročního důchodu o hodnotě např. 12 000 Kč se bude lišit od počáteční hodnoty měsíčního důchodu o hodnotě 1 000 Kč. Ačkoli vyplacená částka bude stejná, přesto počáteční hodnota v druhém případě musí být vyšší, neboť výplaty důchodu jsou poskytovány již v průběhu roku.

Příklad 5-2 *Současná hodnota investice se čtvrtletními výnosy*

Kolik budeme ochotni zaplatit za investici, z níž budeme mít ke konci každého čtvrtletí výnos 4 000 Kč po dobu dvaceti let, požadujeme-li míru výnosnosti 5 % p.a. a předpokládáme-li roční úrokové období? To je možno zformulovat alternativně následujícím způsobem:

Jaká je počáteční hodnota důchodu 4 000 Kč, který se vyplácí na konci každého čtvrtletí po dobu dvaceti let při neměnné roční úrokové sazbě 5 %?

Řešení

Do vzorce (5-4) dosadíme x = 4 000; m = 4; n = 20; i = 0,05:

$$D = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{1-v^n}{i} = 4 \cdot 4\,000 \cdot (1 + \frac{3}{8} \cdot 0{,}05) \cdot \frac{1 - \frac{1}{1{,}05^{20}}}{0{,}05} = 203\,134{,}03.$$

Počáteční hodnota důchodu, tedy cena investice, je 203 134,03 Kč.

Srovnáme-li výsledky příkladů 5-1 a 5-2, vidíme, že počáteční hodnota důchodu v případě čtvrtletních výplat je vyšší než v případě, že platby jsou vypláceny až na konci roku. Vyplacená částka je sice stejná, ale v případě čtvrtletních výplat jsou nám peníze dříve k dispozici.

5.1.2 Důchod bezprostřední předlhůtní

Naším úkolem nyní bude vypočítat počáteční hodnotu důchodu D' ve výši a Kč, vypláceného vždy počátkem úrokového období po n období při úrokové sazbě i. Úrokové období je zde opět roční. Počáteční hodnota D' se rovná stejně jako v případě důchodu bezprostředního polhůtního součtu současných hodnot všech výplat důchodu.

Současnou hodnotu každé výplaty důchodu (anuity) a vypočítáme podle vzorce (3-7) tak, že každou výplatu diskontujeme k výchozímu datu.

Postup je obdobný jako v tabulce 5.1. Na základě stejných úvah dostaneme počáteční hodnotu předlhůtního důchodu ve tvaru:

$$D' = a \cdot \frac{1-v^n}{i \cdot v} \text{ nebo } D' = a \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \qquad \textbf{(5-5)}$$

kde D' je počáteční hodnota předlhůtního důchodu;
a je pravidelná platba (anuita);
i je roční úroková sazba;
n je počet období (let), v kterých jsou anuity vypláceny;
v je diskontní faktor $1 / (1 + i)$.

Výraz:

$$a^{\ddot{}i}_{n} = \frac{1 - v^n}{i \cdot v} \text{ nebo } a^{\ddot{}i}_{n} = (1 + i) \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \qquad \textbf{(5-6)}$$

se nazývá **zásobitel předlhůtní** a udává počáteční hodnotu důchodu s jednotkovými výplatami (anuitami), vyplácenými vždy počátkem úrokového období po n období při úrokové sazbě i.

Ze srovnání vztahů (5-2) a (5-5) vyplývá, že počáteční hodnota předlhůtního důchodu bude za stejných podmínek (*ceteris paribus*) vyšší než počáteční hodnota polhůtního důchodu, neboť hodnota diskontního faktoru v je menší než 1.

Vztah mezi počáteční hodnotou polhůtního a předlhůtního důchodu můžeme vyjádřit vztahem:

$$D' = D \cdot (1 + i) \text{ nebo } D' = \frac{D}{v} \text{ nebo též } D = v \cdot D', \qquad \textbf{(5-7)}$$

kde D je současná hodnota polhůtního důchodu;
D' je současná hodnota předlhůtního důchodu;
i je roční úroková sazba;
v je diskontní faktor, definovaný vztahem (3-8).

Abychom ukázali rozdíl mezi předlhůtními a polhůtními důchody, uvedeme dále příklad se stejnými hodnotami jako pro důchod polhůtní.

Příklad 5-3 *Současná hodnota investice s pravidelnými výnosy na konci roku*

Kolik budeme ochotni zaplatit za investici, jejíž životnost je dvacet let a počátkem každého roku nám z ní plyne platba ve výši 16 000 Kč? Uvažujeme roční úrokovou sazbu 5 % p.a.

Řešení

Zde se jedná o výpočet současné hodnoty předlhůtního důchodu. Dosadíme a = 16 000; n = 20; i = 0,05 a vypočítáme D' podle vzorce (5-5):

$$D' = a \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 16\,000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1-1{,}05^{-20}}{0{,}05} = 209\,365{,}13.$$

Investujeme-li dnes částku 209 365,13 Kč, zajistí nám tato částka výplaty pravidelných částek (anuit) podle požadovaných parametrů.

Vzhledem k tomu, že známe vztah mezi současnou hodnotou polhůtního a současnou hodnotou předlhůtního důchodu, můžeme též využít výsledku z příkladu 5-1 a vztahu (5-7):

$$D' = D \cdot (1+i) = 199\,395{,}37 \cdot 1{,}05 = 209\,365{,}13.$$

Dále je možno vyjádřit rozdíl současné hodnoty předlhůtního a současné hodnoty polhůtního důchodu. Rozdíl je dán rozdílem konečných geometrických řad, které vyjadřují současné hodnoty všech splátek důchodu předlhůtního a polhůtního, a činí $a \cdot (1 - v^n)$, což v našem příkladu je 16 000 · [1 – (1 / 1,05)^{20}] = 9 969,79 Kč.

Nyní budeme předpokládat, že důchod je vyplácen častěji než na konci či začátku úrokového období, a to na počátku každé m-tiny roku, kdy je vyplácena částka x Kč.

Pro výpočet počáteční hodnoty takového důchodu použijeme vzorec (5-2) s tím, že místo částky a vypočítáme, stejně jako u důchodu bezprostředního polhůtního, jaká bude celková hodnota jednotlivých výplat důchodu i s úroky do konce úrokového období (roku). Použijeme vztah (4-2) pro krátkodobé spoření předlhůtní. Počáteční hodnota důchodu se pak vypočítá:

$$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1-v^n}{i}, \tag{5-8}$$

kde D je současná hodnota důchodu;
m je počet částí úrokového období (roku);
x je výše částky, která je vyplácena m-krát za rok;
i je roční úroková sazba;
v je diskontní faktor $1 / (1 + i)$;
n je počet úrokových období (let).

Zde je vidět, že používáme zásobitel polhůtní a nikoli předlhůtní, ačkoli jednotlivé výplaty důchodu jsou vypláceny na počátku každé m-tiny roku. Je to z toho důvodu, že podle vzorce (4-2) pro krátkodobé předlhůtní střádání vypočítáme vlastně výplatu důchodu, kterou bychom získávali na konci roku.

Zde opět, stejně jako u důchodu polhůtního, je třeba si uvědomit rozdíl mezi důchodem s roční výplatou anuit a důchodem s měsíční výplatou anuit. V tomto případě hodnota investice, která nám ponese roční výnosy ve výši např. 12 000 Kč (tedy počáteční hodnota důchodu s ročními výplatami o hodnotě 12 000 Kč) se bude lišit od hodnoty investice s měsíčními výnosy ve výši 1 000 Kč (tedy od počáteční hodnoty důchodu s měsíčními výplatami o hodnotě 1 000 Kč). Ačkoli vyplacená částka bude stejná, přesto počáteční hodnota ve druhém případě bude tentokrát nižší, neboť splátky jsou poskytovány až v průběhu roku. Podobnou úvahu jsme provedli v oddíle 5.1.1 a číselně ji ukázali na příkladech 5-1 a 5-2.

5.2 Důchod odložený

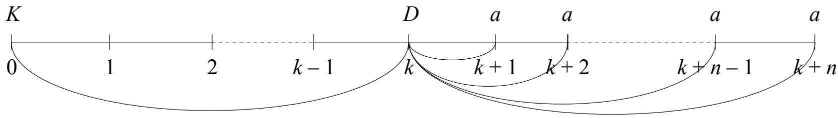
Odložení důchodu znamená, že s jeho výplatou se nezačne ihned, ale až po uplynutí určitého počtu úrokových období, v našem případě ročních. Uvažujeme tedy, že s výplatou důchodu se započne po k letech. Například člověk v produktivním věku investuje své volné peněžní prostředky a za nějakou dobu (např. v důchodovém věku) začne na základě této již zhodnocené investice pobírat pravidelné platby.

Odložený důchod můžeme opět rozdělit podle toho, kdy dochází k výplatám důchodu, na důchod odložený předlhůtní a důchod odložený polhůtní.

5.2.1 Důchod odložený polhůtní

Důchod odložený polhůtní je vyplácen vždy na konci určitého časového intervalu a jeho vyplácení je odloženo o k let.

Úkolem bude vypočítat počáteční hodnotu takového důchodu, který je vyplácen po dobu n let při úrokové sazbě i (viz obr. 5.3).



Obrázek 5.3 Schéma důchodu odloženého polhůtního

Využijeme poznatků o bezprostředním polhůtním důchodu. Víme, že počáteční hodnota D bezprostředního polhůtního důchodu ve výši a se vypočítá jako součet současných hodnot budoucích anuit. U odloženého polhůtního důchodu je to stejné s tím rozdílem, že současnou hodnotu výplaty důchodu, která bude vyplacena v j-tém roce splatnosti důchodu, vypočítáme tak, že hodnotu této výplaty a diskontujeme k výchozímu datu, což znamená, že diskontní faktor umocníme na $j + k$.

Počáteční hodnota K odloženého polhůtního důchodu se pak pomocí vztahu (5-2) vypočítá:

$$K = v^k \cdot a \cdot \frac{1 - v^n}{i}, \tag{5-9}$$

kde K je současná hodnota odloženého důchodu;
v je diskontní faktor;
k je počet úrokových období (let), po která nejsou platby vypláceny;
n je počet úrokových období (let), v kterých jsou vypláceny anuity;
a je velikost anuity (pravidelné platby);
i je roční úroková sazba.

Počáteční hodnota K odloženého polhůtního důchodu je vlastně diskontovaná počáteční hodnota D bezprostředního polhůtního důchodu k výchozímu datu (hodnota D je vynásobená diskontním faktorem, umocněným na k-tou).

***Příklad 5-4** Výše pravidelné výplaty z investované částky*

Máme k dispozici 30 000 Kč. Touto částkou si chceme zajistit roční polhůtní důchod na pět let s tím, že s jeho výplatou začneme za dva roky. Jak vysoké budou výplaty při neměnné 4% roční úrokové sazbě?

Řešení

Za jednotlivé veličiny dosadíme K = 30 000; k = 2; n = 5; i = 0,04 a vypočítáme velikost anuity a. Využijeme vztahu (5-9) a vyjádříme anuitu (roční výplatu) a:

$$a = \frac{K \cdot i}{v^k \cdot (1 - v^n)} = \frac{30\,000 \cdot 0{,}04}{\frac{1}{1{,}04^2} \cdot (1 - \frac{1}{1{,}04^5})} = 7\,288{,}7.$$

Vyplácená částka bude každý rok činit 7 288,7 Kč.

Není-li interval k vyplácení důchodu shodný s úrokovým obdobím a dochází-li k vyplácení důchodu na konci každé m-tiny roku, vypočítáme stejně jako v případě bezprostředního důchodu polhůtního nejprve, kolik budou činit jednotlivé výplaty i s úroky do konce roku. Využijeme tedy vztah pro krátkodobé polhůtní spoření.

Počáteční hodnota odloženého polhůtního důchodu, který je vyplácen m-krát do roka při úrokové sazbě i, bude podle vztahů (5-9) a (4-5) dána vztahem:

$$K = v^k \cdot m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{1 - v^n}{i}, \qquad \textbf{(5-10)}$$

kde K je současná hodnota odloženého důchodu;
v je diskontní faktor definovaný vztahem (3-8);
k je počet úrokových období, po která nejsou platby vypláceny;
n je počet úrokových období (let), v nichž jsou placeny anuity;
x je velikost anuity-pravidelné platby (za rok je jich m);
i je roční úroková sazba;
m je počet stejně dlouhých částí roku, v nichž jsou placeny částky x.

Příklad 5-5 *Současná hodnota výplat, které budeme získávat až po několika letech*

Jak velkou částku musíme dnes při neměnné roční úrokové sazbě 5 % uložit novorozenému dítěti, aby v osmnácti letech mělo takový kapitál, který by mu zabezpečoval po dobu deseti let čtvrtletní polhůtní důchod ve výši 1 400 Kč?

Řešení

Do vztahu (5-10) dosadíme k = 18; m = 4; n = 10; i = 0,05; x = 1 400 a dostaneme:

$$K = v^k \cdot m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{1-v^n}{i} = 1{,}05^{-18} \cdot 4 \cdot 1\,400 \cdot (1 + \frac{3}{8} \cdot 0{,}05) \cdot \frac{1-1{,}05^{-10}}{0{,}05} =$$
$$= 18\,304{,}72.$$

K zabezpečení čtvrtletních výplat důchodu ve výši 1 400 Kč, které začnou za osmnáct let a budou trvat po dobu deseti let, musíme dnes uložit 18 304,72 Kč.

5.2.2 Důchod odložený předlhůtní

Vzhledem k tomu, že všechny úvahy jsou stejné jako pro důchod odložený polhůtní, uvedeme zde pouze základní vzorce.

Počáteční hodnota důchodu odloženého o k let, vypláceného n let vždy na počátku roku při úrokové sazbě i, je dána vztahem:

$$K' = v^{k-1} \cdot a \cdot \frac{1-v^n}{i}, \qquad \textbf{(5-11)}$$

kde K' je současná hodnota odloženého důchodu;
v je diskontní faktor;
k je počet období, po která nejsou platby vypláceny;
n je počet úrokových období, v nichž jsou vypláceny anuity;
a je velikost anuity (pravidelné platby);
i je roční úroková sazba.

Srovnáním vztahů (5-9) a (5-11) zjistíme, že pro současnou hodnotu polhůtního odloženého důchodu a současnou hodnotu předlhůtního odloženého důchodu platí stejný vztah jako pro odpovídající důchody bezprostřední – vztah (5-7), tedy:

$$K' = K \cdot (1+i).$$

V případě, že se důchod vyplácí předlhůtně m-krát za rok, a to ve výši x, bude počáteční hodnota takového důchodu vypočtena na základě vztahu (4-2) pro krátkodobé spoření předlhůtní a vztahu (5-3) pro vyjádření zásobitele polhůtního. Součin obou výrazů musíme ještě vynásobit diskontním faktorem umocněným na k-tou:

$$K = v^k \cdot m \cdot x \cdot (1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{1-v^n}{i}, \tag{5-12}$$

kde K' je současná hodnota důchodu;
m je počet částí úrokového období (roku);
x je výše částky, která je vyplácena m-krát za rok;
i je roční úroková sazba;
v je diskontní faktor $1 / (1 + i)$;
n je počet úrokových období (let);
k je počet období, po která je výplata důchodu odložena.

5.3 Důchod věčný

Je to důchod, jehož výplata není časově omezena (doba splatnosti $n = \infty$).Setkat se s ním můžeme u některých druhů cenných papírů (např. u tzv. konzoly, viz kap. 12), které nemají splatnost a majitel má nárok na výplatu důchodu po neomezenou dobu.

Podle toho, kdy jsou jednotlivé výplaty důchodu vypláceny, hovoříme o důchodu věčném předlhůtním a věčném polhůtním. I důchod věčný může být bezprostřední a odložený. Uveďme tedy opět vztahy pro výpočet současné (počáteční) hodnoty pro jednotlivé typy věčného důchodu. Současná hodnota věčného důchodu je částka, která nám, našim potomkům, jejich potomkům… zajistí pravidelné výplaty důchodu, pokud ji investujeme při dané úrokové sazbě.

5.3.1 Důchod věčný polhůtní

Počáteční hodnotu D věčného důchodu vypočítáme jako limitu vztahu (5-2) pro počáteční hodnotu důchodu bezprostředního polhůtního:

$$D = \lim_{n \to \infty} a \cdot \frac{1-v^n}{i} = \lim_{n \to \infty} a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{a}{i}, \tag{5-13}$$

kde D je současná hodnota bezprostředního důchodu;
a je pravidelná platba – anuita;
i je roční úroková sazba.

Bude-li věčný důchod odložený o k let, musíme vztah (5-13) vynásobit diskontním faktorem, umocněným na k-tou. Získáme tedy:

$$K = v^k \cdot \frac{a}{i}, \tag{5-14}$$

kde K je současná hodnota odloženého důchodu;
a je pravidelná platba – anuita;
i je roční úroková sazba;
k je počet období (let), po která není anuita placena;
v je diskontní faktor $(1 + i)^{-1}$.

Je-li věčný důchod vyplácen m-krát za úrokové období, nahradíme velikost roční výplaty a pomocí vztahu pro krátkodobé spoření předlhůtní, resp. polhůtní podle vztahů (4-2), resp. (4-4) podle toho, kdy jsou prováděny jednotlivé výplaty. Počáteční hodnota bude pro polhůtní případ dána vztahem:

$$D = \frac{m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i)}{i}, \tag{5-15}$$

kde D je počáteční hodnota věčného důchodu;
m je počet stejných částí úrokového období (roku), v nichž jsou placeny anuity;
x je velikost anuity;
i je roční úroková sazba.

Příklad 5-6 *Současná hodnota věčného důchodu*

Jaká částka nám (a našim pozůstalým) zajistí čtvrtletní polhůtní věčný důchod ve výši 5 000 Kč při neměnné roční úrokové sazbě 4 % p.a.?

Řešení

Dosadíme za jednotlivé veličiny x = 5 000; m = 4; i = 0,04. Podle vztahu (5-15) platí:

$$D = \frac{m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i)}{i} = \frac{4 \cdot 5\,000 \cdot (1 + \frac{3}{8} \cdot 0{,}04)}{0{,}04} = 507\,500.$$

K tomu, aby bylo možno věčně získávat každé čtvrtletí částku 5 000 Kč, musíme při dané úrokové sazbě (míře výnosu) uložit (investovat) částku 507 500 Kč.

5.3.2 Věčný důchod předlhůtní

Počáteční hodnota věčného důchodu předlhůtního se vypočítá podobně ze vztahu (5-5) pro současnou hodnotu bezprostředního důchodu předlhůtního pomocí limity, jako v předchozím oddíle. Je vyjádřena vztahem:

$$D' = \lim_{n\to\infty} a\cdot(1+i)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a+\frac{a}{i}, \qquad \textbf{(5-16)}$$

kde D' je současná hodnota důchodu;
a je pravidelná roční anuita;
i je roční úroková sazba.

Ostatní výpočty a odvození vycházejí z uvedeného vzorce a postupů z předchozího oddílu. Vidíme, že počáteční hodnota věčného předlhůtního důchodu se liší od počáteční hodnoty polhůtního důchodu pouze o první platbu a, která je vyplacena na počátku.

Příklad 5-7 *Současná hodnota věčného důchodu, vypláceného až po několika letech*

Jak vysoká dnes složená částka nám zajistí výplatu věčného předlhůtního důchodu ročního ve výši 10 000 Kč od pětašedesáti let našeho věku, je-li nám dnes třicet jedna let a uvažujeme neměnnou úrokovou sazbu 5 % p.a.?

Řešení

Jedná se o výpočet současné hodnoty věčného důchodu předlhůtního odloženého. Dosadíme a = 10 000; k = 65 – 31 = 34; i = 0,05.

Modifikujeme výraz (5-16) a dostaneme:

$$K' = (1+i)^{-k}\cdot a\cdot(1+\frac{1}{i}) = 1{,}05^{-34}\cdot 10\,000\cdot(1+\frac{1}{0{,}05}) = 39\,974{,}51.$$

Dnes je nutno složit částku 39 974,51 Kč.

Ukažme si ještě další příklady, které ilustrují uvedené postupy.

Příklad 5-8 *Porovnání současné a budoucí hodnoty pravidelných plateb*

Za deset let (ve věku pětašedesáti let) hodláme odejít do důchodu. Kolik musíme koncem každého měsíce ukládat na účet úročený 5% úrokovou sazbou, abychom si zajistili až do osmdesáti let života jisté přilepšení ke starobnímu důchodu? Pravidelně si budeme koncem každého čtvrtletí vybírat z účtu částku 5 000 Kč.

Řešení

Musíme porovnat hodnotu úspor, které získáme za deset let, s počáteční hodnotou důchodu, vypláceného po příštích patnáct let:

Spoření		**Důchod**	
m_1	12	m_2	4
n_1	10	n_2	15
i	0,05	i	0,05
x_1	?	x_2	5 000

Vyjdeme ze vztahu pro rovnost naspořené částky (4-15) na levé straně níže uvedené rovnice a ze vztahu pro počáteční hodnotu důchodu (5-4) na pravé straně:

$$m_1 \cdot x_1 \cdot (1 + \frac{m_1 - 1}{2 \cdot m_1} \cdot i) \cdot \frac{(1+i)^{n_1} - 1}{i} = m_2 \cdot x_2 \cdot (1 + \frac{m_2 - 1}{2 \cdot m_2} \cdot i) \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n_2}}{i},$$

$$12 \cdot x_1 \cdot (1 + \frac{11}{24} \cdot 0{,}05) \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} = 4 \cdot 5\,000 \cdot (1 + \frac{3}{8} \cdot 0{,}05) \cdot \frac{1 - 1{,}05^{-15}}{0{,}05},$$

$$x_1 = 1\,370.$$

Musíme ukládat 1 370 Kč.

Příklad 5-9 *Investiční rozhodování na základě současné hodnoty pravidelných výplat*

Právě jste vyhráli v loterii. Můžete si vybrat: a) okamžitě získáte 440 000 Kč, nebo b) po dobu pěti let budete dostávat 100 000 Kč. Co je pro vás nyní výhodnější, můžete-li peníze reinvestovat při úrokové sazbě 5 % p.a.?

Řešení

Porovnáme současnou hodnotu důchodu s pravidelnými ročními platbami 100 000 Kč s okamžitě vyplacenou částkou 440 000 Kč. Protože není jasné, kdy budou částky 100 000 Kč placeny, vypočítáme jak současnou hodnotu polhůtního, tak předlhůtního důchodu.

Řešení pro polhůtní důchod

Dosadíme a = 100 000; n = 5; i = 0,05. Podle vztahu (5-2) platí:

$$D = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 100\,000 \cdot \frac{(1-1,05)^{-5}}{0,05} = 432\,947,67.$$

Z výpočtu vidíme, že je lepší okamžitě získat částku 440 000 Kč, neboť současná hodnota výplat po 100 000 Kč na konci roku je nižší.

Řešení pro předlhůtní důchod

Kdybychom však platby ve výši 100 000 Kč získávali vždy na začátku roku, byla by současná hodnota důchodu podle vztahu (5-7):

$$D' = D \cdot (1+i) = 432\,947,67 \cdot 1,05 = 454\,595,05.$$

V tomto případě, nejsme-li schopni hotovost lépe investovat, je lepší získávat pravidelné platby ve výši 100 000 Kč.

Příklad 5-10 *Současná hodnota pravidelných plateb*

Kolik bychom měli uložit na účet, úročený úrokovou sazbou 5 % p.a., našemu studujícímu synovi, aby si mohl po dobu tří let vždy koncem roku vybrat částku 5 000 Kč na lyžařský zájezd? Poté ještě po dva roky si bude vybírat částku 6 000 Kč.

Řešení

V tomto případě se opět jedná o výpočet současné hodnoty důchodu. Výpočet rozdělíme na dvě části. První část bude výpočet současné hodnoty bezprostředního polhůtního důchodu a druhá část bude výpočet současné hodnoty odloženého polhůtního důchodu. Částku, kterou je třeba uložit, získáme jejich součtem.

Bezprostřední důchod

Dosadíme a = 5 000; n = 3; i = 0,05.

Podle vztahu (5-2) vypočítáme současnou hodnotu bezprostředního polhůtního důchodu:

$$D = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 5\,000 \cdot \frac{(1-1,05)^{-3}}{0,05} = 13\,616,24.$$

Odložený důchod

Dosadíme a = 6 000; n = 2; i = 0,05; k = 3. Podle vztahu (5-9) a (3-8) dostaneme:

$$K = v^k \cdot a \cdot \frac{1-v^n}{i} = 1,05^{-3} \cdot 6\,000 \cdot \frac{1-1,05^{-2}}{0,05} = 9\,637,37.$$

Celkovou částku, kterou je nutno uložit, získáme jako součet:

D + K = 13 616,24 + 9 637,37 = 23 253,61.

Nyní je nutno uložit částku 23 253,61 Kč.

Nebude-li úrokové období roční, je nutno upravit úrokovou sazbu vždy tak, aby odpovídala úrokovému období, a je třeba správně určit jejich počet. Všechny odvozené vztahy však zůstávají v platnosti.

Příklad 5-11 *Současná hodnota pravidelných plateb při pololetním úrokovém období*

Kolik budeme ochotni nyní investovat, jestliže nám z investice vždy na konci měsíce plyne platba ve výši 1 000 Kč po dobu pěti let? Uvažujeme úrokovou sazbu 5 % p.a. a pololetní úrokové období.

Řešení

Jedná se o výpočet současné hodnoty bezprostředního důchodu, vypláceného několikrát (šestkrát) v úrokovém období, které tentokrát není roční, ale pololetní.

Dosadíme do vztahu (5-4):

$$D = m \cdot x \cdot (1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

kde m je 6 (v jednom úrokovém období je vypláceno šest plateb);
i je 0,05 / 2 = 0,025 p.s. (pololetní úroková sazba);
n je 5 · 2 = 10 (pět let po dvou úrokových obdobích):

$$D = 6 \cdot 1\,000 \cdot (1 + \frac{5}{12} \cdot 0,025) \cdot \frac{1-1,025^{-10}}{0,025} = 6\,062,5 \cdot \frac{1-1,025^{-10}}{0,025} = 53\,059,39.$$

Současná hodnota (cena) investice je 53 059,39 Kč.

Částka 6 062,50 Kč, která je uvedena ve výpočtu, je hodnota výplat na konci úrokového období. Říká nám, že místo toho, abychom měsíčně získávali anuity ve výši 1 000 Kč, můžeme dostávat vždy na konci pololetí právě tuto částku 6 062,50 Kč.

6. Splácení úvěru

Úvěr (dluh, půjčka) je důležitý finanční instrument. Úvěrem rozumíme poskytnutí peněžní částky na určitou dobu za odměnu zvanou úrok.

Ačkoli je možné umořování (splácení) úvěru z hlediska věřitele považovat za příjem důchodu, dále si ukážeme některé odlišnosti, které postup splácení úvěru má, nejprve se však zmíníme o základních vlastnostech úvěru a formách jeho splácení.

Podle **doby splatnosti** je možno rozdělit úvěry na:

- krátkodobé, kdy doba splatnosti nepřesahuje jeden rok;
- střednědobé, kdy doba splatnosti je od jednoho do čtyř let;
- dlouhodobé, kdy doba splatnosti je delší než čtyři roky.

Hlavní **způsoby umořování** úvěru můžeme shrnout následujícím způsobem:

- Úvěr je splatný **najednou včetně úroků** za určitou dobu. Tento problém splacení úvěru jednorázově včetně úroků je problém výpočtu splatné částky (budoucí hodnoty) z poskytnuté částky (současné hodnoty) na základě dohodnuté úrokové sazby a doby splatnosti. Byl již řešen v kapitolách 2 a 3, kde jsme se zabývali výpočtem budoucí hodnoty kapitálu. Jednorázové splácení se obvykle užívá pouze při krátké době splatnosti.
- Úvěr je sjednán na neurčitou dobu. Musí být splacen **najednou po výpovědi** při zachování výpovědní lhůty. Úroky se platí ve lhůtách jejich splatnosti. Splácení úroků v pravidelných intervalech z celkové zapůjčené částky, přičemž zapůjčená částka je splacena na závěr, bude řešen v kapitole 12 o dluhopisech.
- Umořování úvěru se provádí od začátku pravidelnými platbami. Podle charakteru těchto plateb rozlišujeme následující alternativy:
  I. Tyto platby mohou být stále stejné (část platby jde na úmor úvěru a část na zaplacení úroku). Hovoříme o **konstantní anuitě.**
  II. Jejich výše není stejná. V tomto případě je většinou stejná částka, která snižuje úvěr – úmor. Hovoříme o **konstantním úmoru.**

III. Výše plateb ani úmorů není konstantní, většinou roste s dobou splatnosti, což je výhodné z hlediska rychlejšího umořování. Tento růst může být charakterizován buď aritmetickou nebo geometrickou posloupností. Hovoříme o **rostoucí anuitě.**

Právě problematikou splácení úvěru pravidelnými platbami se budeme zabývat v této kapitole. Obvykle se tímto způsobem splácejí střednědobé a dlouhodobé úvěry, např. hypoteční nebo spotřební.

Přehled výše splátek úvěru včetně úroků z hlediska jejich časového rozložení sestavují banky pro své klienty do tzv. **umořovacích plánů.**

Umořovací plány slouží:

- k výpočtu a přehledu o výši jednotlivých plateb (úrok, úmor, anuita) v průběhu splácení úvěru;
- k odlišení úmoru a úroku za účelem správného zaúčtování (úmory se platí ze zisku a úroky se zahrnují do nákladů);
- ke zjištění stavu dosud nesplaceného úvěru z hlediska výpočtu úrokové platby např. při prodlení ve splácení.

Umořovací plány se mohou lišit:

- způsobem úročení (dekurzivní, anticipativní);
- obdobími splátek (stejná nebo odlišná od úrokového období).

My se budeme zabývat umořováním úvěrů při dekurzivním (polhůtním) úročení, které je v praxi obvyklejší. V následujícím textu si ukážeme sestavení umořovacího plánu při stejných anuitách i různých polhůtních splátkách.

Umořovací plán obsahuje pro každé období, pro které se sestavuje a v němž je úvěr splácen:

- výši anuity (splátky);
- výši úroku z úvěru;
- výši úmoru (částky, o kterou je v každém období snížen úvěr);
- zůstatek úvěru (po odečtení úmoru).

Každá splátka se tedy skládá z úmoru úvěru a z úroku z úvěru. Hodnoty úroku v době splácení úvěru klesají, což vyplývá ze snižující se hodnoty úvěru, když předpokládáme, že úmory jsou kladné.

6.1 Splácení úvěru stejnými splátkami (konstantní anuita)

Daný úvěr D má být splacen i s úroky n stejnými anuitami a, splatnými vždy koncem úrokového období při neměnné roční úrokové sazbě i. Budeme nyní předpokládat, že úrokové období je roční.

Tento způsob splácení úvěru se dá převést na úlohy o důchodu. Počáteční hodnotu úvěru lze pokládat za počáteční hodnotu důchodu a jednotlivé anuity lze pokládat za výplaty důchodu, který si věřitel zajistil poskytnutím úvěru u dlužníka.

Abychom určili výši anuity, je třeba si uvědomit, že počáteční hodnota úvěru se musí rovnat současné (diskontované) hodnotě všech anuit. Analogicky tomu bylo u důchodu (viz oddíl 5.1.1): počáteční hodnota důchodu se také rovná současné hodnotě všech výplat důchodu. Platí tedy rovnice:

$$D = a \cdot v + a \cdot v^2 + a \cdot v^3 + \ldots + a \cdot v^n,$$

kde $v = \dfrac{1}{1+i}$ je diskontní faktor, definovaný vztahem (3-8);

D je počáteční výše úvěru;

a je anuita.

Součet na pravé straně uvedené rovnice je součtem geometrické řady s kvocientem v. Ve shodě s úvahami v předešlé kapitole tedy:

$$D = a \cdot \frac{1 - v^n}{i} = a \cdot a^i_n,$$

kde D je počáteční hodnota úvěru;

a je anuita (pravidelná, stále stejná platba);

i je roční úroková sazba;

v je diskontní faktor, definovaný vztahem (3-8);

a^i_n je zásobitel polhůtní, definovaný vztahem (5-3).

Vidíme tedy souvislost mezi splácením úvěru konstantní anuitou a důchody, neboť splácí-li jeden subjekt úvěr konstantními splátkami, přijímá druhý subjekt důchod.

Anuitu a vyjádříme následovně:

$$a = D \cdot \frac{i}{1 - v^n}, \qquad \textbf{(6-1)}$$

kde a je anuita;
D je výše úvěru (též počáteční hodnota důchodu);
i je roční úroková sazba;
v je diskontní faktor;
n je doba splatnosti úvěru v letech.

Podíl $\frac{i}{1 - v^n}$ je převrácená hodnota zásobitele a nazývá se **umořovatel.**

Udává výši polhůtní anuity (pravidelné platby) nutné k tomu, aby se zaplatil jednotkový úvěr za n období při úrokové sazbě i.

Pro umořování úvěru potřebujeme sestavit umořovací plán. K jeho sestavení, jak jsme již viděli, potřebujeme znát kromě hodnoty anuity též hodnotu úmoru a úroku. Uveďme si nyní vztahy, podle nichž je možné požadované veličiny vypočítat.

Původní stav úvěru D budeme označovat D_0 (stav v nultém období). Je to současná hodnota všech anuit (z hlediska věřitele počáteční hodnota důchodu), tedy podle vztahu (5-2) platí:

$$D_0 = a \cdot \frac{1 - v^n}{i} = a \cdot a^i_n,$$

kde D_0 je počáteční hodnota úvěru;
a je anuita (pravidelná, stále stejná platba);
i je roční úroková sazba;
a^i_n je zásobitel polhůtní;
v je diskontní faktor, definovaný vztahem (3-8).

Z první anuity připadá na úrok U_1 podle vztahu (2-2) částka $D_0 \cdot i$. Úrok můžeme ze vztahu (5-2) vyjádřit:

$$U_1 = D_0 \cdot i = a \cdot (1 - v^n).$$

Na úmor úvěru M_1 zbývá částka:

$$M_1 = a - U_1 = a - a \cdot (1 - v^n) = a \cdot v^n.$$

Stav úvěru D_1 bude roven rozdílu $D_0 - M_1 = D_0 - a \cdot v^n$, což je součet současných hodnot $n - 1$ splátek. D_1 je možno tedy vyjádřit pomocí zásobitele polhůtního pro $n - 1$ období:

$$D_1 = a \cdot a^i_{n-1}.$$

Předpokládejme nyní, že po zaplacení r splátek má zbytek úvěru výši D_r. Protože D_r je roven současné hodnotě všech zbývajících $n - r$ splátek, můžeme odvodit pro výši úroku U_{r+1} v období $r + 1$ a výši úmoru M_{r+1} v témž období analogické vztahy jako pro výši úroku U_1 a úmoru M_1 v prvním období splácení úvěru.

Pro výši úroku v období $r + 1$ platí:

$$U_{r+1} = D_r \cdot i = a \cdot (1 - v^{n-r}). \qquad \textbf{(6-2)}$$

Je to fakticky úrok ze stavu úvěru D_r na konci předcházejícího r-tého období.

Výše úmoru v období $r + 1$ je dána vztahem:

$$M_{r+1} = a - D_r \cdot i = a \cdot v^{n-r}, \qquad \textbf{(6-3)}$$

což je anuita minus úrok.

Jednotlivé symboly zde značí:

- U_{r+1} je úrok v období $r + 1$, tj. úrok k okamžiku placení $(r + 1)$ splátky úvěru;
- M_{r+1} úmor v období $r + 1$;
- D_r zůstatek úvěru v r-tém období;
- i roční úroková sazba;
- a anuita (pravidelná platba);
- v diskontní faktor (současná hodnota jednotkového vkladu, splatného za rok při úrokové sazbě i);
- n doba splatnosti půjčky.

Umořovací splátky (jednotlivé úmory) tvoří tedy geometrickou posloupnost s kvocientem $v^{-1} = 1 + i$.

Na základě výše uvedených vztahů můžeme sestavit umořovací plán (viz tab. 6.1).

Období	Anuita	Úrok	Úmor	Zůstatek úvěru
0				$a \cdot a^i_n$
1	a	$a \cdot (1 - v^n)$	$a \cdot v^n$	$a \cdot a^i_{n-1}$
2	a	$a \cdot (1 - v^{n-1})$	$a \cdot v^{n-1}$	$a \cdot a^i_{n-2}$
r	a	$a \cdot (1 - v^{n-(r-1)})$	$a \cdot v^{n-(r-1)}$	$a \cdot a^i_{n-r}$
$r + 1$	a	$a \cdot (1 - v^{n-r})$	$a \cdot v^{n-r}$	$a \cdot a^i_{n-(n+1)}$
$n - 1$	a	$a \cdot (1 - v^2)$	$a \cdot v^2$	$a \cdot a^i_1$
n	a	$a \cdot (1 - v)$	$a \cdot v$	–
	$n \cdot a$	$n \cdot a - a \cdot a^i_n$	$a \cdot a^i_n = D_0$	

Tabulka 6.1 Umořovací plán s konstantní anuitou

Protože jednotlivé úmory tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $(1 + i)$, je možné výši úmoru v období $r + 1$ vypočítat vynásobením výše úmoru v r-tém období úrokovacím faktorem:

$$M_{r+1} = M_r \cdot (1 + i).$$

V následujícím příkladu si ukážeme právě naznačené vazby mezi jednotlivými hodnotami, které v umořovacím plánu počítáme.

Příklad 6-1 *Splácení úvěru konstantní anuitou*

Úvěr 40 000 Kč má být umořen polhůtními ročními anuitami za šest let při neměnné roční 5% úrokové sazbě. Určete výši anuity a sestavte umořovací plán.

Řešení

Anuitu spočítáme podle vztahu (6-1), kam dosadíme D = 40 000; n = 6; i = 0,05:

$$a = D \cdot \frac{i}{1 - v^n} = 40\,000 \cdot \frac{0,05}{1 - 1,05^{-6}} = 7\,880,7.$$

Umořovací plán pro tento příklad je uveden v tab. 6.2.

Období	Anuita	Úrok	Úmor	Zůstatek úvěru
r	a	U_r	M_r	D_r
0				40 000,00
1	7 880,7	2 000,00	5 880,70	34 119,30
2	7 880,7	1 705,97	6 174,73	27 944,57
3	7 880,7	1 397,23	6 483,47	21 461,10
4	7 880,7	1 073,05	6 807,64	14 653,45
5	7 880,7	732,67	7 148,03	7 505,43
6	7 880,7	375,27	7 505,43	–

Tabulka 6.2 Umořovací plán pro příklad 6-1

V umořovacím plánu vyplníme nejprve počáteční stav úvěru a potom celý sloupec s anuitami.

Pak v každém řádku vypočítáme výši úroku, což je možné provést podle vztahu (6-2) dvěma způsoby:

- z předcházejícího stavu vkladu;
- z výše anuity.

Výši úmoru můžeme vypočítat podle vztahu (6-3) též dvěma způsoby:

- rozdílem anuita – úrok;
- úročením výše úmoru v předcházejícím období, tj. vlastně diskontováním anuity $(n - r + 1)$krát, kde r je pořadí období.

Provedeme-li kontrolu, např. pro třetí období, dostaneme pro úrok:

$$U_3 = D_2 \cdot i = 1\,397,23$$

nebo:

$$U_3 = a \cdot (1 - v^{n-2}) = 7\,880,7 \cdot (1 - (1/1,05)^4) = 1\,397,23.$$

Pro úmor dostaneme:

$$M_3 = a \cdot v^{n-2} = 7\,880,7 \cdot (1/1,05)^4 = 6\,483,47$$

nebo:

$$M_3 = a - U_3 = 7\,880,7 - 1\,397,23 = 6\,483,47.$$

Pro zůstatek úvěru platí:

$$D_3 = a \cdot \frac{1-v^n}{i} = 7\,880,7 \cdot \frac{1-1,05^{-3}}{0,05} = 21\,461,1.$$

Některé drobné nepřesnosti jsou způsobeny zaokrouhlováním.

Příklad 6-2 *Splácení úvěru konstantní anuitou*

Vytvořme umořovací plán pro úvěr ve výši 500 000 Kč s dobou splatnosti deset let, který bude splácen ročními polhůtními konstantními anuitami při úrokové sazbě i = 6 % p.a.

Řešení

Dosadíme D = 500 000; n = 10; i = 0,06. Anuitu spočítáme podle vztahu (6-1):

$$a = D \cdot \frac{i}{1-v^n} = 500\,000 \cdot \frac{0,06}{1-1,06^{-10}} = 67\,934.$$

Zde vycházíme ze vztahu (3-8):

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}.$$

Umořovací plán, kde uvažujeme konstantní celkovou splátku – anuitu, je uveden v tab. 6.3.

Období	Anuita	Úrok	Úmor	Zůstatek úvěru
0				500 000
1	67 934 Kč	30 000 Kč	37 934 Kč	462 066 Kč
2	67 934 Kč	27 724 Kč	40 210 Kč	421 856 Kč
3	67 934 Kč	25 311 Kč	42 623 Kč	379 233 Kč
4	67 934 Kč	22 754 Kč	45 180 Kč	334 053 Kč
5	67 934 Kč	20 043 Kč	47 891 Kč	286 163 Kč
6	67 934 Kč	17 170 Kč	50 764 Kč	235 398 Kč
7	67 934 Kč	14 124 Kč	53 810 Kč	181 588 Kč
8	67 934 Kč	10 895 Kč	57 039 Kč	124 550 Kč
9	67 934 Kč	7 473 Kč	60 461 Kč	64 089 Kč
10	67 934 Kč	3 845 Kč	64 089 Kč	0 Kč

Tabulka 6.3 Umořovací plán pro příklad 6-2

6.2 Určení počtu předem daných konstantních anuit a poslední splátky úvěru

V oddílu 6.1 jsme spláceli úvěr D při úrokové sazbě i a dané době splatnosti n. Na základě těchto tří veličin jsme dopočítali konstantní anuitu a.

Nyní máme vyřešit úlohu, kdy úvěr D je splácen předem danou pevnou (konstantní) anuitou a při úrokové sazbě i. Tentokrát tedy máme určit, jak dlouho se bude splácet (dobu splatnosti n), případně jak vysoká bude poslední splátka.

Opět vyjdeme ze vztahu (5-2) pro současnou hodnotu důchodu, neboť jak jsme již uvedli, splácení úvěru dlužníkem je vlastně pro věřitele přijímání důchodu.

Ze vztahu (5-2):

$$D = a \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

pomocí vztahu (1-11) pro logaritmování dostaneme:

$$n = \frac{\ln(1 - \frac{D \cdot i}{a})}{\ln v}, \tag{6-4}$$

kde n je doba splatnosti;
D je výše dluhu;
a je konstantní anuita předem daná;
i je roční úroková sazba;
v je diskontní faktor.

Vypočítáme dobu splatnosti n. Je-li vypočtené n celé číslo, tedy doba splatnosti je vyjádřena počtem ukončených úrokových období, můžeme celý případ řešit stejným postupem jako v oddíle 6.1. Úvěr pak splácíme n stejných anuit.

Obecně však vypočtené n (doba splatnosti úvěru) není celé číslo. To potom znamená určit celé (přirozené) číslo n_0, které předchází číslu n. Úvěr pak splácíme počtem $n_0 + 1$ splátek, neboť nemá smysl určit např. 5,4 splátky. Přitom budeme splácet $n_0$krát anuitu a, a pak ještě poslední splátku b, která bude nižší než a.

Pro počáteční hodnotu úvěru získáme vztah:

$$D = a \cdot \frac{1 - v^{n_0}}{i} + b \cdot v^{n_0 + 1}.$$

Poslední splátku úvěru b je pomocí aritmetických úprav možno vyjádřit vztahem:

$$b = (D - a \cdot \frac{1 - v^{n_0}}{i}) \cdot (1 + i)^{n_0 + 1}. \tag{6-5}$$

Poslední splátka b se skládá také z úmoru a úroku.

Stav úvěru po n_0-té splátce má výši $b \cdot v$. Poslední výše úmoru má tudíž také výši $b \cdot v$:

$$M_{n_0 + 1} = b \cdot v.$$

Poslední výše úroku je úrokem z úvěru D_{n0}, tedy také z hodnoty úmoru M_{n_0+1}, přičemž zřejmě platí:

$$U_{n_0+1} = b \cdot v \cdot i.$$

V dalším příkladu si ukážeme odvozený postup na konkrétních číslech. Opět budeme umořovat úvěr stejný jako v příkladu 6-2. Tentokrát bude anuita předem stanovena tak, aby částka byla zaokrouhlena na desetitisíce.

Příklad 6-3 *Výše poslední splátky úvěru*

Úvěr 500 000 Kč se má splácet ročními anuitami ve výši 90 000 Kč při 7% roční úrokové sazbě. Máme určit počet anuit, výši poslední splátky a sestavit umořovací plán.

Řešení

Za jednotlivé veličiny dosadíme D = 500 000; a = 90 000; i = 0,07.

Nejprve spočítáme dobu splatnosti n podle vztahu (6-4):

$$n = \frac{\ln(1 - \frac{D \cdot i}{a})}{\ln v} = \frac{\ln(1 - \frac{500\,000 \cdot 0,07}{90\,000})}{\ln(\frac{1}{1,07})} = 7,27.$$

Počet splátek je osm. Nejbližší nižší celé číslo, které předchází vypočtené době splatnosti n (označené n_0), je rovno sedmi. Tedy budeme platit sedmkrát danou anuitu 90 000 Kč a poslední, osmá splátka bude již nižší. Tu vypočítáme podle vztahu (6-5):

$$b = (D - a \cdot \frac{1 - v^{n_0}}{i}) \cdot (1+i)^{n_0+1} = (500\,000 - 90\,000 \cdot \frac{1 - 1,07^{-7}}{0,07}) \cdot 1,07^8 = 25\,710,86.$$

Poslední splátka bude ve výši 25 710,86 Kč.

Sestavme nyní umořovací plán (viz tab. 6.4).

Období	Anuita	Úrok	Úmor	Zůstatek úvěru
0				500 000
1	90 000	35 000	55 000	445 000
2	90 000	31 150	58 850	386 150
3	90 000	27 031	62 970	323 181
4	90 000	22 623	67 377	255 803
5	90 000	17 906	72 094	183 709
6	90 000	12 860	77 140	106 569
7	90 000	7 460	82 540	24 029
8	25 711	1 682	24 029	

Tabulka 6.4 Umořovací plán k příkladu 6-3

Z uvedených údajů je vidět postup tvorby umořovacího plánu v případě dané anuity. Tento postup je běžnější než případ, kdy se anuita spočítá přesně na základě doby splatnosti. Obvykle jsou placeny anuity částkami zaokrouhlenými na stovky, tisíce nebo desetitisíce.

Dosud jsme řešili případ, kdy jsme spláceli na konci každého úrokového období (uvažovali jsme roční). Dochází-li ke splácení úvěru vícekrát za úrokové období, vypočítáme nejprve hodnotu splátek do jeho konce podle vztahu (4-2) a na základě tohoto výpočtu pak sestavíme umořovací plán (viz příklad 4-5). Vzhledem k tomu, že většina úvěrů, zejména pro fyzické osoby, je splácena měsíčními anuitami, podívejme se dále na vztahy mezi dobou splatnosti úvěru, velikostí měsíční splátky (anuity) a celkově zaplacenými úroky.

Měsíční anuitu vypočítáme podle vztahu (6-1). Uvažujeme zde též měsíční úrokové období:

$$a = D \cdot \frac{i}{1 - v^n},$$

kde i je měsíční úroková sazba;
v je diskontní faktor $1 / (1 + i)$;
n je doba splatnosti v měsících;
D je výše úvěru.

Pro náš příklad vezmeme opět úvěr ve výši 500 000 Kč při úrokové sazbě 6 % p.a., tj. 0,5 % p.m. Hodnoty měsíční anuity a součty celkových úroků pro různé doby splatnosti jsou uvedeny v tab. 6.5.

Doba splatnosti (roky)	Měsíční anuita	Celkové úroky
5	9 666 Kč	79 984 Kč
10	5 551 Kč	166 123 Kč
15	4 219 Kč	259 471 Kč
20	3 582 Kč	359 717 Kč
25	3 222 Kč	466 452 Kč
30	2 998 Kč	579 191 Kč

Tabulka 6.5 Vztah mezi dobou splatnosti úvěru, měsíční splátkou a celkově zaplacenými úroky

Z uvedené tabulky vidíme, že při době splatnosti úvěru kratší než deset let jsou zaplacené úroky na rozdíl od měsíční anuity poměrně nízké.

Při době splatnosti mezi deseti a dvaceti lety je měsíční splátka výrazně nižší než například pro pětiletý úvěr a celkové úroky jsou ještě přijatelné.

Pro úvěry s dobou splatnosti nad dvacet let se měsíční anuita už o mnoho nesníží, zatímco zaplacené úroky se blíží násobku vypůjčené částky.

Podívejme se, jak spočítat celkové úroky zaplacené při splácení úvěru, uvedené ve třetím sloupci tabulky 6.5.

Příklad 6-4 *Úrokové náklady úvěru*

Kolik zaplatíme bance celkem na úrocích při splácení desetiletého úvěru ve výši 500 000 Kč konstantními anuitami na konci každého měsíce? Úroková sazba je 0,5 % p.m.

Řešení

Nejprve spočítáme anuitu podle vztahu (6-1):

$$a = D \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}},$$

kam dosadíme D = 500 000; i = 0,005 p.m. (měsíční úroková sazba); n = 10 · 12 (deset let po dvanácti měsících):

$$a = 500\,000 \cdot \frac{0,005}{1-1,005^{-120}} = 5\,551,03.$$

Máme anuitu, která je uvedena též ve druhém řádku tabulky 6.5. Úrok pak vyjádříme jako rozdíl součtu všech zaplacených anuit a výše úvěru. Tento vztah můžeme též najít v tabulce 6.1 v posledním řádku ve sloupci úrok. Na základě toho dostaneme:

$$U = n \cdot a - D = 120 \cdot 5\,551,03 - 500\,000 = 166\,123,01.$$

V tomto případě zaplatíme na úroku 166 123,01 Kč. Tento výsledek lze zjistit dosazením konkrétních hodnot do posledního řádku ve sloupci úrok v tabulce 6.1.

6.3 Úmor úvěru nestejnými splátkami

6.3.1 Úmor úvěru stejnými (konstantními) úmory

Daný úvěr D má být splacen i s úroky n splátkami, splatnými vždy koncem úrokového období při neměnné roční úrokové sazbě i. Každá splátka se skládá z konstantní části úvěru – úmoru (D / n) a proměnlivého úroku, který závisí na zůstatku úvěru. Úmor zůstává stále stejný a úrok se snižuje se vzrůstajícím n.

Úmory $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = D / n$.

Původní stav úvěru vyjádříme ve tvaru:

$$D_0 = n \cdot \frac{D}{n}.$$

Úrok v prvním období je dán vztahem:

$$U_1 = D_0 \cdot i = n \cdot \frac{D}{n} \cdot i.$$

Sestavme nyní umořovací plán na základě výše uvedených vztahů (viz tab. 6.6).

Období	Splátka	Úrok	Úmor	Zůstatek úvěru
0				$n \cdot D / n$
1	$D / n \cdot (n \cdot i + 1)$	$n \cdot D / n \cdot i$	D / n	$(n - 1) \cdot D / n$
2	$D / n \cdot [(n - 1) \cdot i + 1]$	$(n - 1) \cdot D / n \cdot i$	D / n	$(n - 2) \cdot D / n$
r	$D / n \cdot [(n - r + 1) \cdot i + 1]$	$(n - r + 1) \cdot D / n \cdot i$	D / n	$(n - r) \cdot D / n$
$r + 1$	$D / n \cdot [(n - r) \cdot i + 1]$	$(n - r) \cdot D / n \cdot i$	D / n	$(n - r - 1) \cdot D / n$
$n - 1$	$D / n \cdot (2 \cdot i + 1)$	$2 \cdot D / n \cdot i$	D / n	D / n
n	$D / n \cdot (i + 1)$	$D / n \cdot i$	D / n	–
	$\boldsymbol{D \cdot (n + 1) \cdot i / 2 + 1}$	$\boldsymbol{(n + 1) \cdot D / 2 \cdot i}$	$\boldsymbol{n \cdot D / n}$	

Tabulka 6.6 Umořovací plán s konstantními úmory

Při tomto způsobu umořování úvěru tvoří jednotlivé úrokové platby aritmetickou posloupnost, která má diferenci rovnou rozdílu kterýchkoli dvou po sobě jdoucích plateb.

Uvažujme například rozdíl první a druhé úrokové platby:

$$U_1 - U_2 = n \cdot \frac{D}{n} \cdot i - (n-1) \cdot \frac{D}{n} \cdot i = \frac{D}{n} \cdot i.$$

Protože jednotlivé úrokové platby tvoří aritmetickou posloupnost a úmory jsou konstantní, tvoří též celkové splátky v jednotlivých obdobích aritmetickou posloupnost se stejnou diferencí.

Ukažme si nyní, jak se liší splácení konstantní anuitou od splácení konstantním úmorem zejména z hlediska zaplacených úroků. Použijme stejné hodnoty, s jakými jsme počítali v příkladu 6-2.

Příklad 6-5 *Splácení úvěru konstantním úmorem*

Ukažme nyní na příkladě, jak bude vypadat umořovací plán pro úvěr ve výši 500 000 Kč. Doba splatnosti úvěru je stanovena na deset let, přičemž splácen bude ročními splátkami vždy na konci roku při úrokové sazbě 6 % p.a.

Řešení

Za jednotlivé veličiny dosadíme D = 500 000; n = 10; i = 0,06. Úmor bude stále stejný. Výši úmoru získáme, vydělíme-li zapůjčenou částku počtem období splácení, tedy:

$$\frac{D}{n} = \frac{500\,000}{10} = 50\,000.$$

Při tvorbě umořovacího plánu nejprve vyplníme poslední dva sloupce. Sloupec s úrokovými platbami vyplníme na základě znalosti předchozího zůstatku úvěru a součtem úroku a úmoru v každém období získáme anuitu (viz tab. 6.7).

Období	Splátka	Úrok	Úmor	Zůstatek úvěru
0				500 000
1	80 000	30 000	50 000	450 000
2	77 000	27 000	50 000	400 000
3	74 000	24 000	50 000	350 000
4	71 000	21 000	50 000	300 000
5	68 000	18 000	50 000	250 000
6	65 000	15 000	50 000	200 000
7	62 000	12 000	50 000	150 000
8	59 000	9 000	50 000	100 000
9	56 000	6 000	50 000	50 000
10	53 000	3 000	50 000	0

Tabulka 6.7 Umořovací plán k příkladu 6-5

Srovnáme-li umořovací plány z příkladu 6-2 a 6-5, vidíme, že celkové splátky jsou při konstantní anuitě až do pátého roku splácení nižší než v případě konstantních úmorů. Celkově zaplacený úrok je však při konstantní anuitě vyšší, neboť základ pro výpočet úroků (zůstatek) se snižuje pomaleji než při splácení konstantním úmorem.

6.3.2 Úmor úvěru nestejnými úmory

Ukažme si sestavení umořovacího plánu pro umoření úvěru nestejnými splátkami (ani část připadající na úmor zde není stejná). Pro některé speciální případy, které jsou matematicky jednoduše popsatelné, existuje analytické vyjádření.

6.3.2.1 Úmor úvěru anuitami, které rostou geometricky

Daný úvěr D má být splacen i s úroky n splátkami, splatnými vždy koncem úrokového období při neměnné roční úrokové sazbě i. Každá splátka je vždy o g % vyšší než splátka předchozí.

Abychom určili výši první splátky, je třeba vzít v úvahu, že počáteční hodnota úvěru se musí rovnat současné (diskontované) hodnotě všech splátek.

$$D = \frac{a}{(1+i)} + \frac{a\cdot(1+g)}{(1+i)^2} + \frac{a\cdot(1+g)^2}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{a\cdot(1+g)^{n-1}}{(1+i)^n}, \qquad \textbf{(6-6)}$$

kde D je počáteční hodnota úvěru,
a je anuita (pravidelná stále stejná platba),
i je roční úroková sazba,
g je míra růstu anuity menší než úroková sazba i,
n je doba splatnosti úvěru.

Součet na pravé straně výrazu je součtem geometrické řady s kvocientem $\frac{(1+g)}{(1+i)}$.

Podle výrazu pro součet geometrické řady (1-18) můžeme vztah (6-6) přepsat ve tvaru:

$$D = a\cdot\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g} = a\cdot a^{i,g}{}_n, \qquad \textbf{(6-7)}$$

kde $a^{i,g}{}_n = \dfrac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}.$ **(6-8)**

První splátka úvěru se vyjádří ze vztahu (6-7) následovně:

$$a = D \cdot \frac{i-g}{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n} = D \cdot \frac{1}{a^{i,g}{}_n}. \tag{6-9}$$

Na základě výše uvedených vztahů můžeme sestavit obecný umořovací plán:

Období	Splátka	Úrok	Úmor	Zůstatek
0				$a \cdot a^{i,g}{}_n$
1	a	$i \cdot a \cdot a^{i,g}{}_n$	$a \cdot (1 - i \cdot a^{i,g}{}_n)$	$a \cdot a^{i,g}{}_{n-1}$
2	$a \cdot (1+g)$	$i \cdot a \cdot a^{i,g}{}_{n-1}$	$a \cdot (1 - i \cdot a^{i,g}{}_{n-1})$	$a \cdot a^{i,g}{}_{n-2}$
$r-1$	$a \cdot (1+g)^{r-2}$	$i \cdot a \cdot a^{i,g}{}_{n-(r-2)}$	$a \cdot (1 - i \cdot a^{i,g}{}_{n-r+2})$	$a \cdot a^{i,g}{}_{n-r+1}$
r	$a \cdot (1+g)^{r-1}$	$i \cdot a \cdot a^{i,g}{}_{n-r+1}$	$a \cdot (1 - i \cdot a^{i,g}{}_{n-r+1})$	$a \cdot a^{i,g}{}_{n-r}$
$r+1$	$a \cdot (1+g)^{r}$	$i \cdot a \cdot a^{i,g}{}_{n-r}$	$a \cdot (1 - i \cdot a^{i,g}{}_{n-r})$	$a \cdot a^{i,g}{}_{n-r-1}$
$n-1$	$a \cdot (1+g)^{n-2}$	$i \cdot a \cdot a^{i,g}{}_2$	$a \cdot (1 - i \cdot a^{i,g}{}_2)$	$a \cdot a^{i,g}{}_1$
n	$a \cdot (1+g)^{n-1}$	$i \cdot a \cdot a^{i,g}{}_1$	$a \cdot (1 - i \cdot a^{i,g}{}_1)$	0

Příklad 6-6 *Splácení úvěru rostoucí anuitou*

Ukažme nyní na příkladě, jak bude vypadat umořovací plán pro úvěr ve výši 500 000 Kč. Doba splatnosti úvěru je stanovena na deset let, přičemž splácen bude ročními rostoucími splátkami vždy na konci roku při úrokové sazbě 6 % p.a. Míra růstu je konstantní a je stanovena na 4 % ročně.

Řešení

První splátka ve výši *a* se vypočítá pomocí výrazu (6-9)

$$a = D \cdot \frac{i-g}{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n} = 500\,000 \cdot \frac{0{,}06-0{,}04}{1-\left(\frac{1{,}04}{1{,}06}\right)^{10}} = 57\,657{,}05.$$

Další splátka se vypočítá na základě míry růstu g = 0,04

$$a \cdot (1+g) = 57\,657{,}05 \cdot 1{,}04 = 59\,963{,}33.$$

Dále postupujeme analogicky, další sloupce tabulky představující umořovací plán vyplňujeme stejným způsobem jako u varianty splácení konstantní anuitou či konstantním úmorem, tj.

- úrok počítáme z předchozího zůstatku
- úmor zjistíme jako rozdíl mezi splátkou a úrokem

Období	Splátka	Úrok	Úmor	Zůstatek
0				500 000,00
1	57 657,05	30 000,00	27 657,05	472 342,95
2	59 963,33	28 340,58	31 622,76	440 720,19
3	62 361,87	26 443,21	35 918,66	404 801,54
4	64 856,34	24 288,09	40 568,25	364 233,29
5	67 450,60	21 854,00	45 596,60	318 636,69
6	70 148,62	19 118,20	51 030,42	267 606,27
7	72 954,56	16 056,38	56 898,19	210 708,08
8	75 872,75	12 642,48	63 230,26	147 477,82
9	78 907,66	8 848,67	70 058,99	77 418,83
10	82 063,96	4 645,13	77 418,83	0,00

Porovnáme-li tento způsob umořování dluhu s již uvedenými v příkladech 6-2 a 6-5 vidíme, že zůstatek úvěru v jednotlivých obdobích je vždy vyšší, než při splácení úvěru konstantní anuitou a tedy i při splácení konstantním úmorem. Z toho vyplývá, že celkově zaplacený úrok bude v tomto případě nejvyšší ze všech tří zmiňovaných způsobů splácení. Dále je patrné, že diference mezi první a poslední splátkou úvěru bude tím větší, čím vyšší bude míra růstu g. Bude-li míra růstu g nulová, půjde o již uvedený případ v příkladu 6-2 umořování konstantní anuitou.

6.3.2.2 Úmor úvěru anuitami, které rostou na základě násobků

Daný úvěr D má být splacen i s úroky n splátkami, splatnými vždy koncem úrokového období při neměnné roční úrokové sazbě i. Každá splátka je vždy dvakrát vyšší než splátka předchozí.

Abychom určili výši první splátky, je třeba vzít v úvahu, že počáteční hodnota úvěru se musí rovnat současné (diskontované) hodnotě všech splátek.

$$D = a \cdot v + 2 \cdot a \cdot v^2 + \ldots + 2^{n-1} \cdot a \cdot v^n = a \cdot \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \cdot v^k = a \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(2 \cdot v\right)^k =$$

$$= a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2v \cdot \frac{1-(2v)^n}{1-2v}.$$

Tedy po úpravě

$$D = a \cdot v \cdot \frac{1-\left(2v\right)^n}{1-2v} = a \cdot a^{v}_{n}, \qquad \textbf{(6-10)}$$

kde

$$a^{v}_{n} = v \cdot \frac{1-(2v)^n}{1-2v},$$

kde D je počáteční hodnota úvěru,
a je anuita (pravidelná stále stejná platba),
i je roční úroková sazba,
v je diskontní faktor,
n je doba splatnosti úvěru.

Z toho výši první splátky získáme na základě výrazu (každá další platba je dvakrát větší než předcházející):

$$a = D / a^{v}_{n}. \qquad \textbf{(6-11)}$$

Na základě výše uvedených vztahů můžeme sestavit obecný umořovací plán:

Období	Splátka	Úrok (i · zůstatek)	Úmor (splátka – úrok)	Zůstatek
0				$a \cdot a^v_n$
1	a	$i \cdot a \cdot a^v_n$	$a \cdot (1 - i \cdot a^v_n)$	$a \cdot a^v_{n-1}$
2	$2 \cdot a$	$i \cdot a \cdot a^v_{n-1}$	$a \cdot (2 - i \cdot a^v_{n-1})$	$a \cdot a^v_{n-2}$
$r-1$	$2^{r-2} \cdot a$			$a \cdot a^v_{n-r+1}$
r	$2^{r-1} \cdot a$	$i \cdot a \cdot a^v_{n-r+1}$	Splátka-úrok	$a \cdot a^v_{n-r}$
$r+1$	$2^r \cdot a$	$i \cdot a \cdot a^v_{n-r}$	Splátka-úrok	$a \cdot a^v_{n-r-1}$
$n-1$	$2^{n-2} \cdot a$			$a \cdot a^v_1$
n	$2^{n-1} \cdot a$	$i \cdot a \cdot a^v_1$	Splátka-úrok	0

Příklad 6-7 *Splácení úvěru rostoucí anuitou*

Ukažme nyní na příkladě, jak bude vypadat umořovací plán pro úvěr ve výši 500 000 Kč. Doba splatnosti úvěru je stanovena na deset let, přičemž splácen bude ročními rostoucími splátkami vždy na konci roku při úrokové sazbě 6 % p.a. Každá další splátka je dvakrát větší než předchozí.

Řešení

První splátku vypočítáme ze vztahu (6-11)

$$a = D / v \cdot \frac{1-(2v)^n}{1-2v}.$$

Období	Splátka	Úrok	Úmor	Zůstatek
0				500 000,00
1	823,41	30 000,00	-29 176,59	529 176,59
2	1 646,82	31 750,60	-30 103,77	559 280,36
3	3 293,64	33 556,82	-30 263,18	589 543,54

Období	Splátka	Úrok	Úmor	Zůstatek
4	6 587,29	35 372,61	-28 785,32	618 328,86
5	13 174,58	37 099,73	-23 925,15	642 254,02
6	26 349,16	38 535,24	-12 186,08	654 440,10
7	52 698,31	39 266,41	13 431,91	641 008,19
8	105 396,63	38 460,49	66 936,14	574 072,06
9	210 793,26	34 444,32	176 348,93	397 723,12
10	421 586,51	23 863,39	397 723,12	0,00

Jak vyplývá z uvedeného příkladu, není tento způsob konstrukce splátek pro umořování dluhu vhodný, neboť zpočátku jednotlivé splátky nestačí ani na splacení úroku, čímž dluh narůstá a splácí se až v druhé polovině doby splatnosti vysokými splátkami, které se mohou blížit až k výši úvěru samotného.

Na závěr uveďme na konkrétním příkladu situaci pro úvěr splácený nestejnými splátkami, které rostou aritmeticky.

Příklad 6-8 *Splácení úvěru nestejnými splátkami rostoucími aritmeticky*

Úvěr ve výši 280 000 Kč má být splacen polhůtními ročními splátkami. První splátka má výši 10 000 Kč a každá následující je o 10 000 Kč vyšší. Kromě toho je nutno platit běžný úrok ve stejných termínech. Sestavme umořovací plán při úrokové sazbě 8 % p.a.d.

Řešení

V tomto případě máme v zadání slovo splátka, ale myslí se zde úmor. Skutečná splátka úvěru vznikne až přičtením odpovídajícího úroku.

V našem případě docílíme rychlejšího umoření úvěru rostoucím úmorem. Úmor roste aritmetickou řadou. Sestavíme umořovací plán (viz tab. 6.8), v němž se uvedené hodnoty budou vztahovat vždy na konec úrokového období.

Nejprve vyplníme sloupec nazvaný úmor, a to tak, že v prvním období bude úmor 10 000 Kč, ve druhém 20 000 Kč atd., až součet jednotlivých úmorů bude mít výši rovnou výši úvěru, tj. 280 000 Kč. To bude na konci sedmého období. Je tedy zřejmé, že úvěr bude umořen za sedm let.

Do sloupce zůstatek úvěru doplníme vždy rozdíl předchozího stavu úvěru a úmoru. V posledním období musí být stav úvěru nulový.

Z takto vypočteného nového stavu úvěru budeme pro následující období počítat úrok. Tedy pro k-té období je stav úroku roven osmi procentům ze stavu úvěru v období $k-1$.

Nakonec do sloupce splátka zapíšeme součet úmoru a úroku. Splátka je v tomto případě částka, kterou dlužník koncem každého období platí.

Období	Splátka	Úrok	Úmor	Zůstatek úvěru
0	–		–	280 000
1	32 400	22 400	10 000	270 000
2	41 600	21 600	20 000	250 000
3	50 000	20 000	30 000	220 000
4	57 000	17 600	40 000	180 000
5	64 400	14 400	50 000	130 000
6	70 400	10 400	60 000	70 000
7	75 600	5 600	70 000	–

Tabulka 6.8 Umořovací plán k příkladu 6-8

Počet splátek bychom mohli stanovit ještě před tvorbou umořovacího plánu následujícím způsobem: úmory úvěru tvoří aritmetickou posloupnost s prvním členem a_1 = 10 000 a s diferencí d = 10 000. Součet prvních n členů tvoří konečnou aritmetickou řadu o n členech, jejichž součet je dán vztahem (1-16):

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = 280\,000,$$

kde podle vztahu (1-15) platí:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Dosadíme-li za a_n podle vzorce (1-15), pro $k = n$ do vzorce (1-16), můžeme součet n členů řady vyjádřit:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d].$$

Roznásobením získáme kvadratickou rovnici pro n, jejímž řešením je doba splatnosti úvěru:

$$2 \cdot s_n = 2 \cdot n \cdot a_1 + n^2 \cdot d - n \cdot d,$$

$$n^2 \cdot d + (2 \cdot a_1 - d) \cdot n - 2 \cdot s_n = 0.$$

Dosadíme-li za a_1, d, s_n konkrétní hodnoty a vyřešíme-li kvadratickou rovnici:

$$10\,000n^2 + 10\,000n - 560\,000 = 0$$

$$n^2 + n - 56 = 0,$$

dostaneme dobu splatnosti úvěru sedm let. Druhý kořen kvadratické rovnice je záporný, a tudíž se nám nehodí. Počet splátek se tedy rovná sedmi.

Příklad 6-9 *Splácení úvěru nestejnými splátkami*

Úvěr 120 000 Kč má být splacen ročními polhůtními splátkami (včetně úroků). První splátka je o rok odložena, tedy bude splatná za dva roky ve výši 24 000 Kč. Každá další splátka je vždy o 20 000 vyšší. Sestavme umořovací plán, je-li úroková sazba 10 % p.a.

Řešení

V tomto příkladu na rozdíl od příkladu 6-6 jsou předem známy vztahy mezi jednotlivými splátkami. Úrok i úmor dopočítáme. Umořovací plán tedy vyplňujeme po jednotlivých řádcích (viz tab. 6.9).

V prvním období dojde pouze ke zvýšení stavu úvěru o 10 %.

Ve druhém období bude splacena první anuita, kterou je nutno rozdělit na úmor a úrok. Úrok vypočítáme ze stavu úvěru v prvním období (z hodnoty 132 000 Kč), vypočtenou hodnotu (13 200 Kč) odečteme od anuity (24 000 Kč) a získáme úmor úvěru za druhé období (10 800 Kč). Stav úvěru ve druhém období získáme jako stav úvěru v prvním období, snížený o úmor.

Stejným způsobem pokračujeme i pro další období.

Úrok počítáme vždy ze stavu úvěru v přecházejícím období.

Úmor je rozdíl anuity a úroku. Stav úvěru v běžném období je stav úvěru v předchozím období, snížený o úmor v běžném období.

V posledním, pátém období již bude anuita menší než očekávaných 84 000 Kč.

V tomto období celý stav úvěru, který je menší než očekávaná anuita, je třeba umořit a dopočítat úrok. Tedy stav úvěru z předposledního období napíšeme do sloupce úmor v posledním období. Dále vypočítáme úrok z této částky, pak součet úroku a úmoru dává výši poslední anuity.

Období	Anuita	Úrok	Úmor	Stav úvěru
0	–	–	–	120 000
1	–	12 000,00	–	132 000
2	24 000,00	13 200,00	10 800	121 200
3	44 000,00	12 120,00	31 880	89 320
4	64 000,00	8 932,00	55 068	34 252
5	37 677,20	3 425,20	34 252	–

Tabulka 6.9 Umořovací plán pro příklad 6-9

Srovnání různých možností umořování úvěru uvedených v příkladech

1. Konstantní anuita – příklad 6-2
2. Konstantní úmor – příklad 6-5
3. Geometricky rostoucí anuita – příklad 6-6
4. Rostoucí anuita prostřednictvím násobků – příklad 6.7

můžeme shrnout do tabulky:

Typ splácení	1	2	3	4
Průměrná splátka	67 934	66 500	69 223,6	84 234,8
Celkový úrok	179 340	165 000	192 236,0	342 348,0

Z výše uvedené tabulky i z umořovacích plánů v jednotlivých příkladech vidíme, že v polovině doby splatnosti, tedy v 5. roce je nejnižší zůstatek úvěru u možnosti č. 2, tedy při umořování konstantním úmorem. Při tomto způsobu splácení platí klient nejnižší průměrnou splátku a též nejnižší celkové náklady. Vyplývá to z toho, že zpočátku platí klient splátky vyšší, neboť každá splátka se skládá z konstantního úmoru a úroku. Úrok klesá s klesajícím zůstatkem, čímž klesá i celková splátka.

Úrokově méně výhodné jsou možnosti označené 3 a 4. V obou případech klient platí zpočátku nízké částky a ty s dobou splatnosti rostou. V polovině doby splatnosti zbývá splatit výrazně více než polovinu úvěru. Tyto varianty volí klient v případě, že v současné době nemá dostatečné zdroje na vyšší pravidelné splátky a očekává, že se situace v jeho příjmech bude zlepšovat.

Nejčastěji se využívá první možnost splácení úvěru – konstantní anuita, a to proto, že většina klientů potřebuje mít konstantní zatížení svého rozpočtu.

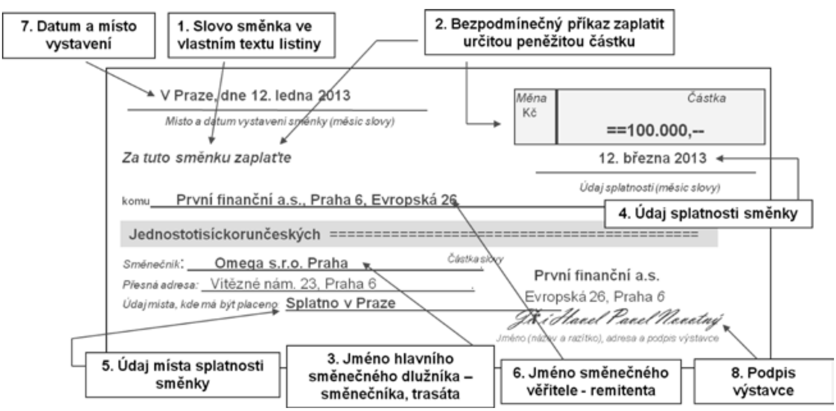
7. Směnky a směnečné obchody

Směnka je cenný papír, splňující zákonem předepsané závazné náležitosti, na kterém se výstavce bezpodmínečně buď u **směnky vlastní** sám zavazuje, nebo u **směnky cizí** přikazuje určité osobě – směnečníkovi zaplatit ve stanoveném termínu právoplatnému majiteli směnky na směnce uvedenou peněžitou částku.

V případě cizí směnky vzniká závazek ze směnky směnečníkovi až akceptací (přijetím) směnky, která spočívá v připojení akceptační doložky a podpisu směnky směnečníkem.

První oprávněný majitel směnky – **remitent** – může směnku, a tedy i práva s ní spojená, převést **indosamentem** (neboli **rubopisem, žirem**) na další osobu. Ta může směnku obdobně převádět dále[13].

Zákonem předepsané **podstatné náležitosti,** které musejí směnky obsahovat, jsou pro směnku cizí patrné z obr. 7.1.



Obrázek 7.1 Náležitosti směnky cizí

[13] Pouze tzv. **rektasměnky,** v nichž výstavce směnky doložkou „nikoli na řad" indosaci zakáže, nelze indosamentem převádět.

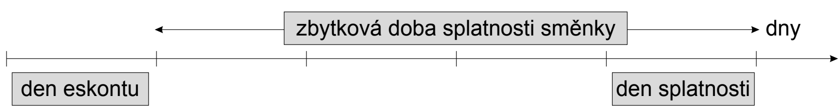
Směnka vlastní musí obsahovat shodné náležitosti, odpadá pouze jméno toho, kdo má platit, protože hlavním směnečným dlužníkem je sám výstavce směnky.

Vedle uvedených, zákonem předepsaných náležitostí může směnka obsahovat i některé další, fakultativní náležitosti – **směnečné doložky.** Ty na směnce být nemusejí, pokud tam ovšem jsou, určitým způsobem modifikují práva a povinnosti směnečných dlužníků a věřitelů.

Oprávněný majitel směnky musí směnku v den splatnosti (pokud není pracovním dnem, tak nejbližší po něm následující pracovní den), resp. ve dvou následujících pracovních dnech předložit stanoveným způsobem k proplacení. Má nárok na vyplacení směnečné částky. U směnky opatřené platnou **úrokovou doložkou**[14] je tato částka zvýšená o úrok od data vystavení do data splatnosti směnky.

7.1 Diskont a eskontní úvěr

Oprávněný majitel směnku může ještě před její splatností prodat, kvalitní obchodní směnky jsou v praxi odkupovány (eskontovány) zejména komerčními bankami. Odkup směnky bankou před její splatností je podstatou **eskontního úvěru.** Banka majiteli směnky přitom vyplácí směnečnou částku, sníženou o úrok za zbytkovou dobu splatnosti směnky – tj. **diskont.**



Obrázek 7.2 Zbytková doba splatnosti směnky

Zbytková doba splatnosti směnky je doba od eskontu do splatnosti směnky. Započítává se do ní den splatnosti směnky, ale nikoli den eskontu (viz obr. 7.2).

---

[14] Úroková doložka spočívá v uvedení úrokové sazby, kterou je směnečná částka ode dne vystavení do dne splatnosti úročena. Platnou úrokovou doložku může obsahovat pouze směnka, která je splatná na viděnou nebo na určitý čas po viděné (po předložení).

Při výpočtu diskontu u směnek se používá tzv. **obchodní** neboli **bankovní diskont.** Jak jsme zjistili již v oddílu 2.6, pro výši diskontu platí:

$$D_{ob} = \frac{Sč \cdot t_Z}{360} \cdot \frac{p_D}{100}, \qquad \textbf{(7-1)}$$

kde D_{ob} je výše obchodního diskontu směnky;
$Sč$ je směnečná částka;
t_Z je zbytková doba do splatnosti směnky ve dnech;
p_D je diskontní sazba v % p.a.

Pro **výši diskontované směnečné částky (SČD)**, kterou banka vyplácí majiteli směnky, potom platí:

$$Sč_D = Sč - D_{ob} = Sč \cdot \left(1 - \frac{t_Z \cdot p_D}{36\,000}\right). \qquad \textbf{(7-2)}$$

Eskont směnky na banku může být dále spojen s určitými provizemi a poplatky bance, které dále snižují diskontovanou směnečnou částku, vyplacenou bankou.

Příklad 7-1 *Výpočet výše eskontního úvěru*

Firma odprodala dne 2. 9. 2013 směnku bance, znějící na částku 150 000 Kč, se splatností 2. 10. 2013. Jaká byla při diskontní úrokové sazbě 10 % p.a. částka, kterou banka firmě vyplatila?

Řešení

Diskontovanou směnečnou částku, kterou banka firmě vyplatí, určíme podle vzorce (7-2). Dosadíme následující hodnoty: $S_č$ = 150 000 Kč; t_Z= 30 dní; p_D = 10 %:

$$Sč_D = 150\,000 \cdot \left(1 - \frac{30 \cdot 10}{36\,000}\right) = 148\,750.$$

Banka vyplatí klientovi částku 148 750 Kč.

7.1.1 Propočet diskontu pomocí úrokových čísel

Pro výpočet diskontované směnečné částky v případě eskontu více směnek najednou s rozdílnými směnečnými částkami a zbytkovými dobami splatnosti při stejné diskontní sazbě je účelné využít propočet pomocí úrokových čísel. S principem úrokových čísel jsme se seznámili v oddílu 2.3.

Vzhledem k tomu, že diskont je ve své podstatě vlastně úrok, je **celková výše diskontu** dána podle vzorce (2-6):

$$D_{ob} = \frac{\sum_{j=1}^{m} UC_j}{UD} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \frac{Sč_j \cdot t_{Zj}}{100}}{\frac{360}{p_D}} = \frac{p_D \sum_{j=1}^{m} Sč_j \cdot t_{Zj}}{36\,000}, \tag{7-3}$$

kde D_{ob} je celková výše diskontu směnek;
UC_j je úrokové číslo j-té směnky;
UD je úrokový dělitel;
$Sč_j$ je směnečná částka j-té směnky;
t_{Zj} je zbytková doba splatnosti j-té směnky ve dnech;
p_D je diskontní sazba v % p.a.;
m je celkový počet směnek.

Celková diskontovaná částka za všechny směnky, kterou banka majiteli směnek při eskontu vyplatí, je potom dána vztahem:

$$Sč_D = \sum_{j=1}^{m} Sč_j - \frac{\sum_{j=1}^{m} UC_j}{UD} = \sum_{j=1}^{m} Sč_j - \frac{p_D \sum_{j=1}^{m} Sč_j \cdot t_j}{36\,000}. \tag{7-4}$$

Příklad 7-2 *Výpočet výše eskontního úvěru při eskontu více směnek*

Firma eskontovala k 4. 11. 2013 na banku následující směnky:

Směnka	**A**	**B**	**C**
Směnečná částka	100 000	150 000	80 000
Den splatnosti směnky	16. 11. 2013	3. 12. 2013	9. 12. 2013

Jaká je při diskontní sazbě 10 % výše celkové diskontované směnečné částky, kterou banka za eskontované směnky firmě vyplatila?

Řešení

Údaje pro výpočet jsou uspořádány přehledně v tab. 7.1.

Směnka	**Směnečná částka** $Sč_j$	**Zbytková doba splatnosti ve dnech** tz_j	**Úrokové číslo** $UC_j = \frac{Sč_j \cdot t_{zj}}{100}$
A	100 000	12	12 000
B	150 000	29	43 500
C	80 000	35	28 000
Celkem	330 000	x	83 500

Tabulka 7.1 Údaje pro příklad 7-2

K dosazení do vzorce (7-4) potřebujeme znát ještě úrokový dělitel, který je podle vztahu (2-4) dán:

$$UD = \frac{360}{p_D} = \frac{360}{10} = 36.$$

Celkovou diskontovanou částku za všechny tři směnky potom dostaneme dosazením do vzorce (7-4):

$$Sč_D = \sum_{j=1}^{m} Sč_j - \frac{\sum_{j=1}^{m} UC_j}{UD} = 330\,000 - \frac{83\,500}{36} = 327\,681.$$

Banka vyplatí při eskontu uvedených tří směnek firmě celkovou diskontovanou směnečnou částku 327 681 Kč.

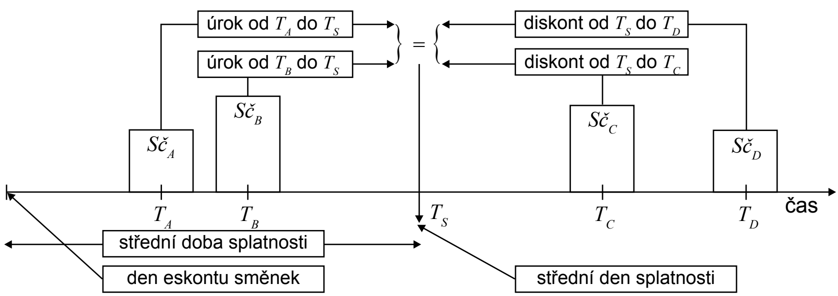
7.2 Eskont směnek na základě střední doby splatnosti

V případě, že klient eskontuje bance najednou více směnek, které se liší datem splatnosti, může být využita metoda eskontu směnek, založená na tzv. střední době splatnosti.

Tato metoda spočívá v tom, že majiteli eskontovaných směnek banka nevyplácí diskontované směnečné částky za jednotlivé směnky hned v době eskontu, ale vyplácí ve střední den splatnosti najednou částku, odpovídající součtu všech nominálních směnečných částek.

Střední den splatnosti je den, ke kterému je současná hodnota[15] všech eskontovaných směnek rovna součtu nominálních částek všech směnek. Neboli úrokové výhody pro banku (plynoucí z toho, že některé směnky inkasuje dříve, než je sama klientovi proplácí) se při dané diskontní sazbě právě vyrovnají s úrokovými náklady (ty analogicky vyplývají z toho, že některé směnky banka naopak klientovi proplácí před jejich splatností). Můžeme tedy říci, že při zohlednění časové hodnoty peněz je tento postup pro banku i klienta shodný, jako při eskontu na základě diskontování směnek.

Schematické znázornění principu eskontování směnek na základě metody střední doby splatnosti pro čtyři směnky s různou splatností je na obr. 7.3.



Obrázek 7.3 Princip metody střední doby splatnosti

[15] Současná hodnota je počítána shodně jako diskontovaná hodnota směnek, tj. na bázi obchodního diskontu.

Z podstaty metody střední doby splatnosti, patrné z obr. 7.3, můžeme odvodit, že má-li se současná hodnota směnek ke střednímu dni splatnosti rovnat součtu nominálních směnečných částek, potom se suma úroků ze směnek, splatných před středním dnem splatnosti (za dobu od splatnosti do středního dne splatnosti) a suma diskontů ze směnek splatných po středním dnu splatnosti (za dobu od středního dne splatnosti do splatnosti daných směnek) musí navzájem shodovat. Musí tedy platit:

$$\frac{Sč_A \cdot (t_S - t_A) \cdot p_D}{36\,000} + \frac{Sč_B \cdot (t_S - t_B) \cdot p_D}{36\,000} + \ldots + \frac{Sč_m \cdot (t_S - t_m) \cdot p_D}{36\,000} = 0, \tag{7-5}$$

kde $Sč_{A,B\ldots}$ je směnečná částka směnky $A, B\ldots$ až m-té směnky;
$t_{A,B\ldots}$ je doba od splatnosti směnky $A, B\ldots$ až m-té směnky do středního dne splatnosti;
t_S je střední doba splatnosti ve dnech;
p_D je diskontní sazba v % p.a.,

což můžeme zapsat jako:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{Sč_j \cdot (t_S - t_j) \cdot p_D}{36\,000} = 0, \tag{7-6}$$

kde $Sč_j$ je směnečná částka j-té směnky;
t_j je doba od splatnosti j-té směnky do středního dne splatnosti;
t_S je střední doba splatnosti ve dnech;
p_D je diskontní sazba v % p.a.

Úpravou rovnice (7-6) můžeme vyjádřit **střední dobu splatnosti** t_S, pro kterou potom platí:

$$t_S = \frac{\sum_{j=1}^{m} Sč_j \cdot t_j}{\sum_{j=1}^{m} Sč_j}. \tag{7-7}$$

Střední den splatnosti dostaneme přičtením střední doby splatnosti ke dni eskontu.

Příklad 7-3 *Určení střední doby splatnosti při eskontu více směnek*

Firma eskontovala k 4. 11. 2013 na banku následující směnky:

Směnka	**A**	**B**	**C**
Směnečná částka	100 000	150 000	80 000
Den splatnosti směnky	16. 11. 2013	3. 12. 2013	9. 12. 2013

Stanovte při diskontní sazbě 10 % p.a. střední den splatnosti, ve kterém banka vyplatí firmě celkovou nominální směnečnou částku.

Řešení

Střední dobu splatnosti vypočítáme dosazením do vzorce (7-7):

$$t_S = \frac{100\,000 \cdot 12 + 150\,000 \cdot 29 + 80\,000 \cdot 35}{100\,000 + 150\,000 + 80\,000} = 25{,}3 \doteq 25.$$

Střední den splatnosti dostaneme přičtením střední doby splatnosti ke dni eskontu, tj. 4. 11. 2013 + 25 dní, čili 29. 11. 2013. V tento den vyplatí banka firmě celkovou nominální směnečnou částku 330 000 Kč.

7.3 Depozitní směnky

Směnky lze rovněž využít jako formu finanční investice neboli uložení peněz. V tomto případě investor kupuje směnku, aby se mu v době splatnosti proplacením směnky investovaná částka vrátila včetně určitého výnosu.

V praxi se můžeme setkat se směnkami, využívanými k investování finančních prostředků v podobě **depozitních směnek,** vydávaných některými bankami. Tuto povahu mohou mít i **komerční papíry,** které emitují velké firmy.

Výnos může plynout majiteli směnky dvojím způsobem:

- jako rozdíl mezi diskontovanou směnečnou částkou, za kterou směnku zakoupí, a nominální směnečnou částkou, kterou obdrží v době splatnosti – v tomto případě je výše výnosu dána diskontem, který vypočítáme podle vzorce (7-1);

- jako úrok ze směnečné částky, který je stanoven na směnce úrokovou doložkou, za dobu od vystavení směnky do její splatnosti[16]. V tomto případě výši výnosu určíme jako jednoduchý úrok dle vzorce 2-1.

Výnosy plynoucí z bankovních depozitních směnek (směnek vystavených bankou proti přijetí investované částky od věřitele) podléhají stejnému zdanění jako je tomu u dluhopisů:

- **úrokové výnosy** nebo výnos plynoucí z rozdílu mezi nominální hodnotou vyplácenou v době splatnosti a diskontovanou emisní cenou při jejich vydání jsou zdaňovány podle následujících pravidel:
  - pro *fyzické osoby* se na tyto výnosy vztahuje srážková daň se zvláštní sazbou daně ve výši 15 %[17]; daň sráží a odvádí přímo emitující banka při výplatě úroků, tyto příjmy potom nejsou součástí příjmů vcházejících do daňového přiznání;
  - *fyzickým osobám – podnikatelům, pokud je finanční investice zahrnuta v jejich obchodním majetku, a právnickým osobám* vcházejí příjmy z úrokových výnosů do daňového základu;
- **kapitálové výnosy** plynoucí z rozdílu mezi prodejní a kupní cenou směnek (které nejsou úrokovými výnosy) patří mezi ostatní příjmy a vcházejí do celkového daňového základu s výjimkou případu, kdy se jedná o fyzickou osobu a doba od nákupu do prodeje směnky přesáhne šest měsíců[18] – v tomto případě jsou pro fyzické osoby od daně osvobozeny.

Příklad 7-4 *Výpočet výnosu z depozitní směnky*

Klient zakoupil dne 4. 2. 2013 od banky depozitní směnku za její nominální hodnotu, znějící na částku 500 000 Kč. Směnka byla opatřena úrokovou doložkou s úrokovou sazbou 2 % p.a. Splatnost směnky byla stanovena na viděnou, přičemž směnka nesměla být předložena k proplacení dříve než za tři měsíce a ne později než za čtyři měsíce. Klient předložil směnku k proplacení dne 13. 5. 2013. Jaký byl výnos ze směnky?

---

16 Jak již bylo řečeno, platná úroková doložka může být pouze na směnce, která má splatnost stanovenou na viděnou (při předložení) nebo na určitý čas po viděné, a spočívá v uvedení úrokové sazby, kterou je směnečná částka úročena.

17 Od roku 2015 se sazba zvyšuje na 19 %.

18 Od roku 2015 se tato doba prodlužuje na 3 roky.

Řešení

Banka vyplácí klientovi v době splatnosti při předložení nominální směnečnou částku plus úrokový výnos, vyplývající z úrokové doložky. Úrok je vypočítán na základě jednoduchého úročení a je podle vzorce (2-1) dán:

$$u = \frac{SČ \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360} = \frac{500\,000 \cdot 2 \cdot 98}{100 \cdot 360} = 2\,722{,}22.$$

Hrubý výnos ze směnky podléhá 15% srážkové dani, která bude činit:

2 722 · 0,15 = 408,30, po zaokrouhlení 408 Kč.

Čistý výnos z depozitní směnky činí 2 314,22 Kč.

8. Skonto

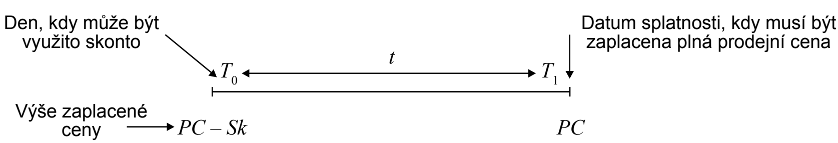
V případech, kdy prodávající firma dává možnost zaplatit zboží kupující firmě až po určitém období (prodává tedy na obchodní úvěr), poskytuje někdy současně možnost získání slevy na dohodnuté ceně za předpokladu, že kupující zaplatí okamžitě, resp. během stanovené krátké lhůty. Tato sleva se označuje jako **skonto.**

Výše skonta je obvykle stanovena v procentech z prodejní ceny, nikoli tedy na roční bázi (p.a.), jako tomu je např. u eskontního úvěru. Absolutní výši skonta potom dostaneme vynásobením procentní sazby prodejní cenou:

$$Sk = \frac{r_{Sk} \cdot PC}{100}, \qquad \textbf{(8-1)}$$

kde Sk je absolutní výše skonta;
r_{Sk} je skonto vyjádřené v % z prodejní ceny;
PC je prodejní cena.

Před kupujícím stojí v těchto případech otázka, zda je pro něj výhodnější využít skonto a zaplatit sníženou cenu hned, nebo odsunout zaplacení na pozdější dobu s tím, že ovšem zaplatí plnou cenu. Obě alternativy jsou znázorněny na obr. 8.1.



Obrázek 8.1 Schematické znázornění principu skonta

Pro kupujícího znamená pozdější zaplacení plné ceny de facto čerpání úvěru ode dne zakoupení (resp. ode dne, ke kterému může zaplatit cenu sníženou o skonto) do skutečného zaplacení zboží a skonto představuje úrok za tento úvěr. V případě, že by totiž chtěl zaplatit okamžitě a neměl by peníze, musel by si je vypůjčit[19].

[19] Nebo analogicky: kdyby měl peníze na okamžité zaplacení a využil by možnosti platit až později, mohl by do této doby své volné prostředky uložit a ty by mu nesly úrok.

Z tohoto důvodu výhodnost či nevýhodnost využití skonta můžeme posoudit na základě srovnání skonta s úrokem. Můžeme tak učinit buď na základě porovnání absolutní výše skonta a úroku, avšak vzhledem k tomu, že úroky z úvěru (resp. depozit) jsou obvykle stanovovány v procentech na roční bázi, je možné přepočítat i skonto na stejnou bázi a porovnat přímo s úrokovou sazbou. Pro prodávajícího vychází úvaha o výši skonta, které může kupujícímu nabídnout, ze stejného principu.

8.1 Srovnání absolutní výše skonta a úroku

Pro kupujícího bude využití skonta a okamžité zaplacení snížené ceny výhodnější v tom případě, když bude skonto vyšší než úrok za dobu ode dne, kdy mohla být zaplacena cena, snížená o skonto do doby splatnosti, kdy musí být zaplacena plná cena (tj. od T_0 do T_1 na obr. 8.1). To znamená, že musí platit:

$$Sk > \frac{(PC - Sk) \cdot t \cdot p}{100 \cdot 360}, \qquad \textbf{(8-2)}$$

kde Sk je absolutní výše skonta;
PC je prodejní cena;
t je doba od T_0 do T_1 ve dnech;
p je úroková sazba v % p.a.

V případě, že by nastala ve výrazu (8-2) rovnost, jsou obě varianty stejně výhodné. Jestliže by skonto bylo nižší než úroky, potom by byla pro kupujícího výhodnější varianta s odloženým placením plné ceny.

Absolutní zisk (popř. ztrátu) z využití okamžitého placení se skontem před odloženým placením můžeme potom vyjádřit jako:

$$Z = Sk - \frac{(PC - Sk) \cdot t \cdot p}{100 \cdot 360}, \qquad \textbf{(8-3)}$$

kde Z je zisk vyplývající z využití okamžitého placení se skontem;
Sk je absolutní výše skonta;
PC je prodejní cena;
t je doba od T_0 do T_1 ve dnech;
p je úroková sazba v % p.a.

8.2 Srovnání relativní výše skonta a úroku

Jak již bylo řečeno, na skonto můžeme pohlížet jako na úrok. Potom samozřejmě můžeme i skonto vyjádřit ve standardní formě, tj. v procentech na roční bázi. Podle vzorce (2-10), vyjadřujícího výši úrokové sazby při jednoduchém úročení, můžeme výši skonta na roční bázi vyjádřit jako:

$$p_{Sk} = \frac{Sk \cdot 100 \cdot 360}{(PC - Sk) \cdot t}, \qquad \textbf{(8-4)}$$

kde p_{Sk} je skonto vyjádřené z prodejní ceny v % na roční bázi;
Sk je absolutní výše skonta;
PC je prodejní cena;
t je doba od T_0 do T_1 ve dnech.

Výhodnost skonta pro kupujícího můžeme potom posoudit přímo porovnáním s roční úrokovou sazbou z alternativního úvěru (resp. depozita). Z možných tří variant vzájemných vztahů vyplývají následující výsledky:

Vztah mezi skontem a úrokovou sazbou	Výhodnější varianta pro kupujícího
$p_{Sk} > p$	využití skonta a okamžité zaplacení
$p_{Sk} = p$	varianty jsou rovnocenné
$p_{Sk} < p$	odložené zaplacení

Absolutní zisk (popř. ztrátu) z využití okamžitého placení se skontem před odloženým placením můžeme potom s využitím skonta vyjádřeného v procentech p.a. stanovit jako:

$$Z = \frac{(PC - Sk) \cdot t \cdot (p_{Sk} - p)}{100 \cdot 360}, \qquad \textbf{(8-5)}$$

kde Z je absolutní zisk, vyplývající z využití okamžitého placení se skontem;
p_{Sk} je skonto vyjádřené z prodejní ceny v % na roční bázi;
Sk je absolutní výše skonta;
PC je prodejní cena;
t je doba od T_0 do T_1 ve dnech;
p je úroková sazba z alternativního úvěru, resp. depozita, v % p.a.

Příklad 8-1 *Posouzení výhodnosti skonta z hlediska kupujícího*

Prodávající firma dodala zboží v celkové prodejní ceně 200 000 Kč. Částka je splatná do čtyř týdnů, přičemž při zaplacení do jednoho týdne nabízí prodávající firma možnost skonta ve výši 2 % z prodejní ceny. V případě okamžitého zaplacení by musela kupující firma nákup financovat krátkodobým úvěrem, úroková sazba činí 12 % p.a. Je pro kupující firmu za daných podmínek výhodné využít skonta a zaplatit zboží do týdne či nikoliv?

Řešení

Absolutní výši skonta určíme podle vzorce (8-1):

$$Sk = \frac{r_{Sk} \cdot PC}{100} = \frac{2 \cdot 200\,000}{100} = 4\,000.$$

Výše úroků U z potenciálního úvěru, použitého na okamžité zaplacení do sedmi dnů, je podle vzorce (8-2):

$$U = \frac{(PC - Sk) \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100} = \frac{(200\,000 - 4\,000) \cdot 21 \cdot 12}{360 \cdot 100} = 1\,372.$$

Protože je absolutní výše skonta vyšší než úroky z alternativního úvěrového financování, je okamžité zaplacení při využití skonta a refinancování úvěrem výhodnější než odložené zaplacení plné ceny.

Shodný výsledek dostaneme i při přepočtu skonta na relativní roční bázi a jeho porovnání s úrokovou sazbou z úvěru. Skonto na relativní roční bázi vypočítáme podle vzorce (8-4) a dostaneme:

$$p_{Sk} = \frac{Sk \cdot 100 \cdot 360}{(PC - Sk) \cdot t} = \frac{4\,000 \cdot 100 \cdot 360}{(200\,000 - 4\,000) \cdot 21} = 34{,}99\ \%.$$

Skonto vyjádřené v procentech na roční bázi je vyšší než úroková sazba potenciálního úvěru, a z toho vyplývá, že je výhodnější okamžité placení s využitím skonta.

9. Běžné účty

Běžný účet představuje jeden ze základních bankovních produktů, který stojí velmi často na počátku vzájemných vztahů mezi klientem a bankou.

Běžný účet můžeme charakterizovat jako účet, který vede banka pro svého klienta a jehož hlavní funkcí je provádění platebního styku. Pokud stav na účtu může vykazovat i záporný (debetní) zůstatek, bývá takový účet označován jako **kontokorentní** a úvěr takto čerpaný jako **kontokorentní úvěr.**

9.1 Metody výpočtu úroků na běžných účtech

Z podstaty běžného účtu vyplývá, že výše zůstatku na něm se často mění. Zvyšuje se úhradami přijatými ve prospěch účtu a naopak se snižuje provedením platebních příkazů k úhradě na vrub účtu. Na konci úrokového období banka též na běžný účet připíše úroky z částek, které na něm byly uloženy.

Pro výpočet úroků na běžných účtech se vyvinuly tři různé formální postupy:

- **zůstatkový** (anglický);
- **postupný** (německý);
- **zpětný** (francouzský).

Všechny výše uvedené metody používají pro stanovení výše úroku výpočet pomocí úrokových čísel podle vztahu (2-3).

9.2 Zůstatkový způsob

Při tomto způsobu vedení běžného účtu se úroky počítají vždy za dobu, po kterou se stav účtu nezměnil. Úrokové číslo se určí z výše zůstatku na účtu a z počtu dní, po kterou zůstala nezměněna. Takto vypočtená úroková čísla se na konci úrokového období sečtou a dělí se příslušným úrokovým dělitelem. Tím získáme úrok, který se připíše na konci období k zůstatku běžného účtu.

Příklad 9-1 *Výpočet úroků zůstatkovou metodou*

Určete, jaký bude stav běžného účtu na konci roku, jestliže na něm byl během roku následující pohyb: 1. 1. stav účtu 3 000 Kč, 15. 4. vklad 1 500 Kč, 15. 6. výběr 1 000 Kč, 1. 10. vklad 1 000 Kč. Předpokládáme, že úrokové období je roční, vycházíme ze standardu 30/360 – měsíc počítáme jako 30 dní a rok 360 dní; úroková sazba 1 % zůstává po celý rok neměnná, od zdanění úroků abstrahujeme.

Řešení

Výpočet je uveden v tab. 9.1.

Den	**Text**	**Má dáti**	**Dal**	**Zůstatek**	**Doba nezměněného stavu**	**Úrokové číslo**
1. 1.	zůstatek			3 000,00	105	3 150
15. 4.	vklad		1 500,00	4 500,00	60	2 700
15. 6.	výběr	1 000,00		3 500,00	105	3 675
1. 10.	vklad		1 000,00	4 500,00	90	4 050
31. 12.	zůstatek			4 500,00		∑ 13 575
31. 12.	úrok		37,71			
1. 1.	zůstatek			4 537,71		

Tabulka 9.1 Výpočet pro příklad 9-1

Pro výpočet úrokových čísel jsme využili vztah (2-3):

$$UC = \frac{K \cdot t}{100},$$

kde UC je úrokové číslo;
K je výše kapitálu (zůstatku na účtu);
t je úrokové období ve dnech.

Výše úroků je potom podle vztahu (2-5) dána:

$$u = \frac{UC}{UD} = \frac{13\,575}{360} = 37{,}71,$$

kde u je výše úroků;
UD je úrokový dělitel.

9.3 Postupný způsob

Při postupném způsobu vedení běžného účtu se při výpočtu úroků vypočte úrokové číslo z každé změny, a to od data změny do konce roku. Úrokové číslo při zvýšení stavu běžného účtu (vkladové) má kladné znaménko a úrokové číslo vypočtené při snížení stavu běžného účtu (výběrové) má záporné znaménko. Součet úrokových čísel za celé úrokové období se dělí úrokovým dělitelem.

Pro ilustraci uvedené metody využijeme stejný vývoj na běžném účtu, jako v příkladu 9-1.

Příklad 9-2 *Výpočet úroků postupnou metodou*

Vypočtěte konečný zůstatek na běžném účtu z příkladu 9-1 postupnou metodou.

Řešení

Výpočet je patrný z tabulky (tab. 9.2).

Den	**Text**	**Má dáti**	**Dal**	**Doba od změny do konce roku**	**Úrokové číslo**
1. 1.	zůstatek		3 000,00	360	10 800
15. 4.	vklad		1 500,00	255	3 825
15. 6.	výběr	1 000,00		195	–1 950
1. 10.	vklad		1 000,00	90	900
31. 12.	zůstatek	4 500,00			∑ 13 575
31. 12.	úrok		37,71		
1. 1.	zůstatek		4 537,71		

Tabulka 9.2 Výpočet k příkladu 9-2

9.4 Zpětný způsob

Vedeme-li běžný účet zpětným způsobem, je třeba nejprve zvolit výchozí datum, tzv. epochu (např. 1. 1. běžného roku). Úroková čísla se vypočítají z každé změny, a to od data epochy do data změny. Úroková čísla při zvýšení stavu běžného účtu mají záporné znaménko a úroková čísla při snížení stavu běžného účtu mají kladné znaménko. Nakonec se vypočte úrokové číslo z konečného zůstatku účtu ode dne epochy do konce úrokového období (samozřejmě s kladným znaménkem). Součet úrokových čísel se na konci úrokového období dělí úrokovým dělitelem.

Příklad k ilustraci toho postupu vychází opět z běžného účtu z příkladu 9-1.

Příklad 9-3 *Výpočet úroku zpětným způsobem*

Vypočtěte konečný zůstatek na běžném účtu z příkladu 9-1 zpětnou metodou.

Řešení

Výpočet opět uspořádáme do tabulky (tab. 9.3).

Den	**Text**	**Má dáti**	**Dal**	**Doba od epochy do změny**	**Úrokové číslo**
1. 1.	zůstatek		3 000,00	0	
15. 4.	vklad		1 500,00	105	–1 575
15. 6.	výběr	1 000,00		165	1 650
1. 10.	vklad		1 000,00	270	–2 700
31. 12.	zůstatek	4 500,00		360	16 200
					∑ 13 575
31. 12.	úrok		37,71		
1. 1.	zůstatek		4 537,71		

Tabulka 9.3 Výpočet k příkladu 9-3

Z předchozích příkladů je vidět, že všechny tři metody vedení běžného účtu vedou ke stejnému výsledku.

10. Hypoteční úvěry

Základní charakteristický rys hypotečních úvěrů je jejich zajištění zástavním právem k nemovitosti. Nejčastěji jsou využívány u podnikatelských i nepodnikatelských subjektů k financování pořízení či úprav nemovitého majetku.

V případě, že je hypoteční úvěr refinancován emisí hypotečních zástavních listů nebo je-li na něj uplatňována některá forma státní podpory, musí splňovat podmínky stanovené zákonem.[20] Ty určují, že nemovitost sloužící jako zajištění se musí nacházet na území státu, který je součástí Evropského hospodářského prostoru, a výše úvěru může činit maximálně 70 % ze zástavní hodnoty zastavené nemovitosti.

Cena zdrojů je primárním faktorem pro stanovení **úrokové sazby** z hypotečních úvěrů; její výše je ovlivněna i dalšími faktory, jako je např. doba splatnosti úvěru, druh a kvalita zastavované nemovitosti, účel použití aj. Úroková sazba z hypotečních úvěrů může být stanovena jako pevná sazba po celou dobu splatnosti nebo jako pohyblivá sazba měnící se v závislosti na vývoji tržních úrokových sazeb. Často se používá i kombinace obou způsobů, to znamená pevná sazba pro několik počátečních let a sazba pohyblivá pro zbylou dobu do splatnosti úvěru, může se jednat i o opakovanou fixaci úrokové sazby na několik let dopředu.

Hypoteční úvěrování je spojeno i s různými formami **státní finanční podpory,** která zlepšuje podmínky poskytování úvěrů a zvyšuje jejich dostupnost pro širší okruh klientů.

Pro poskytnutí hypotečního úvěru musí žadatel splnit celou řadu podmínek, které můžeme rozdělit do tří základních oblastí:

- bonita klienta, zaručující právní i ekonomickou způsobilost k přijetí a splacení hypotečního úvěru;
- v případě účelového úvěru kvalita investičního záměru, který bude z poskytnutého hypotečního úvěru financován, a jeho soulad se zákonnými podmínkami;
- cena nemovitosti, sloužící jako zástava, a její vhodnost využití k zajištění úvěru.

---

[20] Viz zákon č. 190/2004 Sb., o dluhopisech.

10.1 Stanovení výše hypotečního úvěru

Maximální výše hypotečního úvěru je limitována následujícími faktory:

- výše disponibilních zdrojů klienta využitelných ke splácení úvěru – hypoteční úvěr musí být primárně splácen z příjmů klienta, které musejí být v takové výši, aby dávaly předpoklad k řádnému splácení úvěru po celou dobu jeho splatnosti;
- cena zástavy, resp. výše tzv. zadlužitelné části – hypoteční úvěr musí být zajištěn zástavním právem k nemovitosti a jeho výše nemůže převýšit cenu zástavy, obvykle je dokonce požadováno, aby cena zástavy převyšovala výši úvěru. U nás jsou hypoteční úvěry poskytovány maximálně do 70 % ceny zastavované nemovitosti;[21]
- v případě účelového hypotečního úvěru – cena financovaného předmětu – hypoteční úvěr je nejčastěji poskytován jako účelový úvěr k financování pořízení nemovitosti, a tudíž jeho výše nesmí cenu této nemovitosti přesáhnout.

Tento limit platí jak pro hypoteční úvěry poskytnuté jednorázově, tak i pro úvěry s postupným čerpáním. K postupnému čerpání hypotečního úvěru dochází zpravidla v těch případech, kdy je využíván k financování nově budované nemovitosti. V tomto případě musí být zabezpečeno splnění limitu při poskytnutí každé dílčí části úvěru, současně však poskytnutý úvěr musí umožnit dokončení nemovitosti. Z těchto dvou podmínek lze potom odvodit minimální cenu rozestavěné nemovitosti, při které jsou ještě podmínky splněny. Předpokládáme-li, že vždy bude čerpán hypoteční úvěr do stanoveného limitu 70 % ceny zastavované nemovitosti, potom musí platit, že výchozí cena rozestavěné nemovitosti plus suma všech postupně čerpaných částí úvěru musí výsledně dát celkovou konečnou cenu nemovitosti, což můžeme formalizovaně zapsat jako:

$$P_0 + HU_1 + HU_2 + \ldots + HU_n = P, \qquad \textbf{(10-1)}$$

kde P_0 je minimálně potřebná výchozí cena zastavované rozestavěné nemovitosti;

---

[21] Jak jsme již uvedli, tento limit je zákonem stanoven pro hypoteční úvěry refinancované emisí hypotečních zástavních listů a rovněž pro ty, na které je uplatňována státní podpora.

$HU_1 \ldots HU_n$	jsou jednotlivé dílčí části poskytovaného úvěru;
n	je počet dílčích částí poskytovaného úvěru;
P	je celková konečná cena nemovitosti.

Výše úvěru může činit maximálně 0,7 ceny zastavené nemovitosti, to znamená, že pro první část úvěru musí platit:

$$HU_1 = P_0 \cdot 0,7. \tag{10-2}$$

Druhá část úvěru potom může zvýšit celkový stav úvěru zase pouze na úroveň 0,7 z aktuální ceny zastavené nemovitosti, která se bude rovnat počáteční ceně nemovitosti, zvýšené o proinvestovanou první část úvěru. Vzhledem k tomu, že již poskytnutý úvěr činil $P_0 \cdot 0,7$, může druhá část úvěru činit pouze:

$$HU_2 = HU_1 \cdot 0,7 = P_0 \cdot 0,7^2. \tag{10-3}$$

Obecně potom pro každou další část úvěru HU_i musí platit:

$$HU_i = HU_{i-1} \cdot 0,7 = P_0 \cdot 0,7^i. \tag{10-4}$$

Vyjádříme-li rovnici (10-1) s využitím vztahu (10-4), dostaneme:

$$P_0 + P_0 \cdot 0,7 + P_0 \cdot 0,7^2 + \ldots + P_0 \cdot 0,7^n = P. \tag{10-5}$$

Výraz (10-5) je geometrickou řadou[22] s $n + 1$ členy a kvocientem 0,7. Levou stranu rovnice můžeme upravit podle vzorce pro součet geometrické řady:

$$P_0 \cdot \frac{0,7^{n+1} - 1}{0,7 - 1} = P. \tag{10-6}$$

Pro první člen geometrické řady P_0, což je minimální požadovaná výchozí cena rozestavěné nemovitosti, potom platí:

$$P_0 = P \cdot \frac{0,7 - 1}{0,7^{n+1} - 1}. \tag{10-7}$$

---

22 Viz kapitola 1.

Je zřejmé, že minimální možná výchozí cena rozestavěné nemovitosti klesá s růstem počtu částí, do kterých je poskytnutí úvěru rozděleno; limitně pro počet částí úvěru $n \to \infty$ platí pro minimální výši výchozí ceny rozestavěné nemovitosti:

$$P_0 \geq P \cdot (1 - 0{,}7). \qquad \textbf{(10-8)}$$

Příklad 10-1 *Určení minimální výše výchozí ceny rozestavěné nemovitosti*

Plánovaná konečná cena nemovitosti je 2 mil. Kč, zadlužitelná část nemovitosti činí 70 %, poskytnutí hypotečního úvěru je rozloženo do tří částí. Kolik musí činit minimální výchozí cena nemovitosti?

<u>Řešení</u>

Minimální výchozí cenu nemovitosti určíme dle vztahu (10-7):

$$P_0 = P \cdot \frac{0{,}7 - 1}{0{,}7^{n+1} - 1} = 2\,000\,000 \cdot \frac{0{,}7 - 1}{0{,}7^{3+1} - 1} = 789\,578.$$

Výchozí cena zastavované nemovitosti musí být minimálně 789 578 Kč.

10.2 Splácení hypotečních úvěrů

Výše poskytnutého úvěru spolu s úrokovou sazbou a dobou splatnosti determinuje i výši splátek úvěru. Hypoteční úvěry se obvykle splácejí pravidelnými konstantními anuitami. Výši roční anuity můžeme dle vztahu (6-1) vypočítat:

$$a_{p.a.} = \frac{HU \cdot i_{p.a.} \left(1 + i_{p.a.}\right)^n}{\left(1 + i_{p.a.}\right)^n - 1}, \qquad \textbf{(10-9)}$$

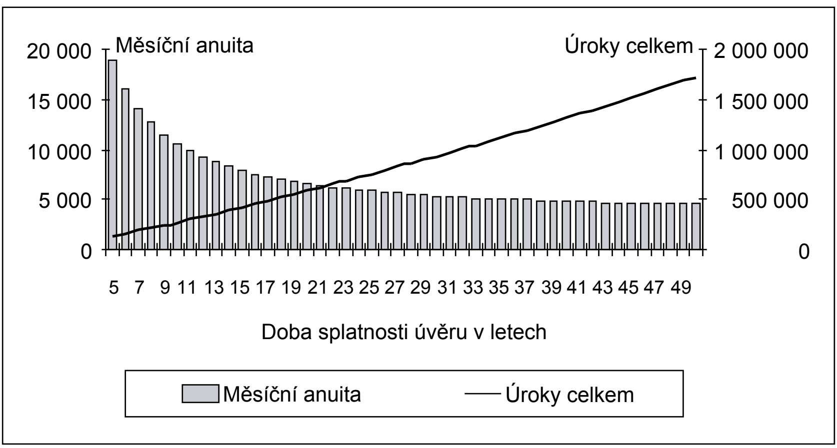
kde $a_{p.a.}$ je roční výše anuity;
HU je výše hypotečního úvěru;
$i_{p.a.}$ je roční úroková sazba z úvěru vyjádřená jako desetinné číslo;
n je doba splatnosti v letech.

Úpravou vzorce (10-9) můžeme vyjádřit i vzorec pro výpočet obvykle využívané měsíční anuity:

$$a_{p.m.} = \frac{HU \cdot \frac{i_{p.a.}}{12}\left(1+\frac{i_{p.a.}}{12}\right)^{n\cdot 12}}{\left(1+\frac{i_{p.a.}}{12}\right)^{n\cdot 12}-1} = \frac{HU \cdot i_{p.m.}\left(1+i_{p.m.}\right)^{n\cdot 12}}{\left(1+i_{p.m.}\right)^{n\cdot 12}-1}, \qquad \textbf{(10-10)}$$

kde $a_{p.m.}$ je měsíční výše anuity;
HU je výše hypotečního úvěru;
$i_{p.m.}$ je měsíční úroková sazba z úvěru vyjádřená jako desetinné číslo;
n je doba splatnosti v letech.

Ze vzorce je patrné, že výše anuity roste s rostoucí úrokovou sazbou, a naopak klesá s prodlužující se dobou splatnosti. Vliv doby splatnosti na výši anuity se ovšem postupně snižuje (mezní snížení anuity v důsledku přírůstku doby splatnosti klesá). O významnějším poklesu anuity lze hovořit přibližně do 20–25 let splatnosti, další růst doby splatnosti se ve výši anuity projeví již nevýznamně, na druhé straně ovšem rostou celkové zaplacené úroky (viz obr. 10.1).



Obrázek 10.1 Závislost výše anuity a celkových úroků na době splatnosti úvěru (úvěr ve výši 1 mil., úroková sazba 5 % p.a.)

Každá anuita se skládá z úroku a úmoru, jejichž velikost se postupně mění: úroky se snižují a naopak úmor roste. Pokud budeme chtít určit, **jak velká část dané anuity připadá na úroky** a jak velká na úmor, můžeme tak učinit na základě vztahu (6-2). V anuitě placené v termínu T_{r+1} za měsíční úrokové období od T_r do T_{r+1} bude potom připadat na úrok část anuity U_{r+1}:

$$U_{r+1} = HU_r \cdot i_{p.m.} = a_{p.m.} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1+i_{p.m.}}\right)^{n \cdot 12 - r}\right) =$$

$$= \frac{HU_r \cdot i_{p.m.}\left(1+i_{p.m.}\right)^{n \cdot 12}}{\left(1+i_{p.m.}\right)^{n \cdot 12} - 1} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1+i_{p.m.}}\right)^{n \cdot 12 - r}\right), \qquad \textbf{(10-11)}$$

kde $a_{p.m.}$ je měsíční výše anuity;
HU_r je nesplacená část hypotečního úvěru v čase r;
$i_{p.m.}$ je měsíční úroková sazba z úvěru;
$n \cdot 12$ je doba splatnosti v měsících;
r je doba v měsících od poskytnutí úvěru do termínu T_r;
$n \cdot 12 - r$ je doba v měsících od termínu T_r do splatnosti úvěru.

10.3 Státní finanční podpora hypotečního úvěrování

Jak jsme již uvedli, stát podporuje různými formami hypoteční úvěrování a zvýhodňuje tak podmínky jejich poskytování. Za základní formy státní finanční podpory hypotečního úvěrování v České republice lze považovat:

- příspěvek k úrokům;
- ***možnost*** pro fyzické osoby ***odečíst ze základu daně z příjmů*** částku rovnající se úrokům (sníženou o státní příspěvek k úrokům) zaplaceným za zdaňovací období z hypotečního úvěru, který byl poskytnutý a i použitý na financování bytových potřeb. Částka, o kterou lze maximálně snížit základ daně, může činit za zdaňovací období maximálně 300 tis. Kč (při uplatnění nezdanitelné částky dvěma či více členy domácnosti pak hodnotu příslušného podílu této maximální částky připadajícího na každého z nich).

Státní podpora ve formě příspěvku[23] se stanoví jako rozdíl mezi výší měsíční anuitní splátky při úrokové sazbě dohodnuté s bankou a výší měsíční anuitní splátky, která je stanovena při úrokové sazbě, snížené o výši státní finanční podpory. Snížení závisí na průměrné výši úrokových sazeb z hypotečních úvěrů, kterou vyhlašuje vždy k 1. únoru příslušného kalendářního roku Ministerstvo pro místní rozvoj:

Výše průměrné úrokové sazby *p* z hypotečních úvěrů vyhlášené pro daný rok MMR	$p < 5$ %	5 % $\leq p$ < 6%	6 % $\leq p$ < 7%	7 % $\leq p$ < 8%	$p \geq 8$ %
Výše státní finanční podpory (% body)	0	1	2	3	4

Při stanovení výše státní podpory ve formě příspěvku k úrokům se vychází ze skutečné doby splatnosti úvěru. Je-li doba jeho splatnosti delší než 10 let, vychází se při stanovení výše příspěvku z doby splatnosti 10 let. Příspěvky se poskytují na koupi bytu nejvýše do částky 800 tis. Kč, nebo na koupi rodinného domu s jedním bytem nejvýše do částky 1,5 mil. Kč (přesahuje-li úvěr nebo jeho část určená na koupi bytu nebo rodinného domu s jedním bytem tyto částky, příspěvky se na část úvěru přesahující tyto částky neposkytnou).

Získání podpory je vázáno na splnění dalších podmínek, zejména:

- žadatel v roce podání žádosti o poskytnutí příspěvků nedovrší 36 let,
- žadatel není k datu podání žádosti o poskytnutí příspěvků vlastníkem nebo spoluvlastníkem bytového domu, rodinného domu nebo bytu,
- dům či byt je starší než dva roky a je na území České republiky.

Příklad 10-2 *Výpočet splátek hypotečního úvěru se státní podporou*

Žadatel mladší 36 let chce získat hypoteční úvěr na koupi rodinného domu s jednou bytovou jednotkou, jehož cena je 2 500 000 Kč. Jakou částku mu banka poskytne? Jak vysoké budou měsíční anuity při úrokové sazbě 5 % p.a., počítá-li, že úvěr splatí za patnáct let? Jak vysoké budou anuity v případě poskytnutí státní podpory?

[23] Viz nařízení vlády č. 249/2002 Sb.

Řešení

Banka poskytne hypoteční úvěr v maximální výši 70 % z ceny kupované nemovitosti. Klient tedy může dostat, splní-li všechny podmínky, úvěr v maximální výši 1 750 000 Kč.

Měsíční anuitu vypočítáme podle vztahu (10-10):

$$a_{p.m.} = \frac{U \cdot \frac{i_{p.a.}}{12}\left(1+\frac{i_{p.a.}}{12}\right)^{n \cdot 12}}{\left(1+\frac{i_{p.a.}}{12}\right)^{n \cdot 12} - 1} = \frac{1\,750\,000 \cdot \frac{0,05}{12}\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^{15 \cdot 12}}{\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^{15 \cdot 12} - 1} = 13\,839.$$

V případě, že bude splňovat podmínky pro poskytnutí státní podpory, bude mu státní podpora poskytnuta pouze z části úvěru, neboť pro rodinný dům s jednou bytovou jednotkou je limit 1,5 mil. Kč.

Státní podpora je dána jako rozdíl anuity při úrokové sazbě dohodnuté s bankou a anuity při úrokové sazbě snížené.

Musíme tedy vypočítat měsíční anuitu pro splácení úvěru ve výši 1 500 000 Kč při úrokové sazbě 5 % p.a., dále měsíční anuitu při úrokové sazbě 4 % (sazba snížená o státní podporu ve výši 1 procentního bodu – předpokládáme průměrnou výši sazby vyhlášenou MMR 5 %), a to pro úvěr se splatností 10 let. Rozdíl takto vypočítaných anuit dává výši státní podpory klienta.

Nejprve vypočítáme anuitu z úvěru ve výši 1 500 000 Kč při úrokové sazbě sjednané s bankou:

$$a_{p.m.} = \frac{1\,500\,000 \cdot \frac{0,05}{12}\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^{10 \cdot 12}}{\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^{10 \cdot 12} - 1} = 15\,910.$$

Dále je nutné spočítat anuitu z částky úvěru 1,5 mil. Kč při úrokové sazbě o 1 procentní bod snížené, tj. 4 % p.a.

$$a_{p.m.} = \frac{1\,500\,000 \cdot \frac{0,04}{12}\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^{10\cdot 12}}{\left(1+\frac{0,04}{12}\right)^{10\cdot 12}-1} = 15\,187.$$

Státní podpora je dána rozdílem obou anuit z limitní výše úvěru ve výši 1 500 000 Kč. Bude tedy:

15 910 – 15 187 = 723 Kč měsíčně.

Klient bude v tomto případě měsíčně splácet částku, která je dána rozdílem anuity pro splácení celkově poskytnutého úvěru a státní podpory, tedy:

13 839 – 723 = 13 116 Kč.

Možnost odpočtu úroků z hypotečního úvěru od základu daně z příjmů byla zavedena novelou zákona č. 586/1992 Sb., o daních z příjmů, s platností od 1. ledna 1998. Odpočítat lze úroky snížené o státní příspěvek, zaplacené poplatníkem – fyzickou osobou – ve zdaňovacím období z hypotečního úvěru, použitého poplatníkem na financování bytových potřeb.[24] Poplatník musí daný úvěr řádně splácet a předmět bytové potřeby vlastní a v době po nabytí právní moci kolaudačního rozhodnutí též užívá ke svému trvalému bydlení nebo bydlení manžela, potomků, rodičů nebo prarodičů. Úhrnná částka úroků, o kterou lze snížit základ daně, nesmí překročit u poplatníků v téže domácnosti částku 300 000 Kč.

Přínos odpočtu zaplacených úroků z daňového základu závisí jednak na velikosti zaplacených úroků, jednak i na výši daňového základu poplatníka a na sazbách daně z příjmů. Daňový přínos se u daného úvěru mění i v průběhu splatnosti hypotečního úvěru v závislosti na tom, jak se mění struktura anuity: klesá podíl připadající na úroky a roste podíl úmoru. Tento přínos lze vyjádřit jako:

daňový přínos = daň z příjmů před odpočtem úroků – daň z příjmů po odpočtu úroků.

[24] Zákon o daních z příjmů taxativně vymezuje bytové potřeby.

Z toho vyplývá, že daňový přínos pro poplatníka se přibližně bude rovnat odpočítávaným úrokům, vynásobeným příslušnou daňovou sazbou dle výše daňového základu.

Příklad 10-3 *Výpočet daňové úspory*

Kolik bude činit roční daňová úspora u hypotečního úvěru uvedeného v příkladu 10-2 v důsledku odpočtu zaplacených úroků v prvním roce splácení (předpokládáme pro zjednodušení poskytnutí úvěru k 1. lednu daného roku), pokud celkový daňový základ činí 400 000 Kč?

Řešení

Nejprve musíme vypočítat objem zaplacených úroků v prvním roce splácení. Ty dostaneme tak, že dle vztahu (10-11) určíme výši úroku ve všech anuitách placených v daném roce. Pro první anuitu (placenou na konci prvního měsíce) bude výše úroků činit:

$$U_{r+1} = a_{p.m.} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1+i_{p.m.}}\right)^{n \cdot 12 - r}\right) = 13\,839 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1+\frac{0,05}{12}}\right)^{15 \cdot 12 - 0}\right) = \\ = 7\,292. \qquad \textbf{(10-12)}$$

Podobně určíme výši úroku ve všech dalších anuitách zaplacených v daném roce a dostaneme:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
7 292	7 264	7 237	7 210	7 182	7 154	7 126
VIII.	**IX.**	**X.**	**XI.**	**XII.**	**celkem**	
7 098	7 070	7 042	7 014	6 985	85 674	

Od zaplacených úroků musíme odečíst státní příspěvek k úrokům, který klient obdržel. Ten bude za dvanáct měsíců činit:

$723 \cdot 12 = 8\,676$ Kč.

Jako odpočet od základu daně z příjmů potom může poplatník uplatnit částku:

85 674 – 8 676 = 76 998 Kč.

Daň před odpočtem úroků by byla (pro zjednodušení není v příkladě uvažováno snížení daně na poplatníka, manželku, děti apod.):

$400\,000 \cdot 0{,}15 = 60\,000$ Kč.

Daňový základ po odpočtu úroků bude činit:

400 000 – 76 998 = 323 002 Kč

a daň po odpočtu úroků potom bude:

$323\,002 \cdot 0{,}15 = 48\,450$ Kč.

Porovnáním obou daňových částek dostaneme celkovou daňovou úsporu:

60 000 – 48 450 = 11 550.

Poplatníkovi vznikla v prvním roce v důsledku odpočtu úroků od základu daně z příjmů celková daňová úspora ve výši 11 550 Kč.

11. Spotřebitelské úvěry

Spotřebitelské úvěry lze obecně charakterizovat jako úvěry poskytnuté fyzickým osobám na nepodnikatelské účely. Pro praktické využití u nás má zásadní význam vymezení spotřebitelských úvěrů v zákoně o spotřebitelském úvěru[25]. Spotřebitelským úvěrem se rozumí ***odložená platba, půjčka, úvěr nebo jiná obdobná finanční služba poskytovaná nebo přislíbená spotřebiteli věřitelem, nebo zprostředkovatelem.*** Takto široké vymezení spotřebitelského úvěru vychází – v souladu s úpravou v EU[26] – ze základní orientace zákona na ochranu klienta. Potřeba ochrany klienta vyplývá z určitého nerovného postavení, ve kterém se klient může ve vztahu k bance či jinému poskytovateli spotřebitelského úvěru ocitnout. Klient totiž nemusí být schopen správně posoudit veškeré podmínky smlouvy. Z tohoto důvodu se zákon vztahuje na všechny instituce poskytující spotřebitelské úvěry a zahrnuje všechny jeho formy s výjimkou v zákoně taxativně vyjmenovaných případů, zejména se jedná o odloženou platbu, půjčku, úvěr nebo jinou obdobnou finanční službu např.

- poskytnutou pro účely bydlení, v níž je pohledávka zajištěna zástavním právem,
- sjednanou v podobě nájmu věci nebo leasingu**, u nichž není** sjednána koupě či jiná možnost nabytí předmětu smlouvy po uplynutí určité doby,
- poskytnutou bez úroku **a** jakékoli úplaty,
- sjednanou v podobě průběžného poskytování služby nebo dodávání zboží stejného druhu, za které klient může platit v průběhu jejich poskytování formou splátek,
- s celkovou výší nižší než 5 000 Kč nebo vyšší než 1 880 000 Kč; částka 5 000 Kč se považuje za dosaženou též tehdy, je-li mezi týmž věřitelem a klientem uzavřeno v období 12 měsíců více smluv se stejným nebo obdobným účelem,
- kterou zaměstnavatel poskytuje svým zaměstnancům jako vedlejší činnost s roční procentní sazbou nákladů nižší, než je roční procentní sazba nákladů spotřebitelských úvěrů obvykle nabízená na trhu, a která není obecně nabízena veřejnosti,

---

25 Zákon č. 145/2010 Sb., o spotřebitelském úvěru.

26 Směrnice Evropského parlamentu a Rady 2008/48/ES ze dne 23. dubna 2008 o smlouvách o spotřebitelském úvěru.

- sjednanou s obchodníkem s cennými papíry nebo bankou, jejímž účelem je provedení operace s investičním nástrojem, přičemž obchodník s cennými papíry nebo banka jsou do této operace zapojeni.

Spotřebitelské úvěry mohou být poskytovány buď přímo bankou (popř. jinou finanční společností) jako ***přímé spotřebitelské úvěry*** nebo jako ***nepřímé spotřebitelské úvěry*** prostřednictvím společnosti prodávající zboží či služby na spotřebitelský úvěr.

11.1 Úročení spotřebitelských úvěrů

Pro úrokové sazby ze spotřebitelských úvěrů většinou platí, že jsou relativně vysoké, což vyplývá z rizika, které je s těmito úvěry pro banku spojeno.

Vzhledem k tomu, že výše úrokové sazby včetně dalších poplatků a způsob jejího stanovení, je z hlediska dopadu na klienta základním faktorem determinujícím výhodnost úvěru, a dále i vzhledem k tomu, že stanovení úrokové sazby a dalších poplatků by mohlo být ve formě, která by nedovolovala její relativně snadné posouzení ze strany klienta, jsou v zákoně o spotřebitelském úvěru pro úročení spotřebitelských úvěrů závazně stanovena určitá pravidla.

Smlouva, ve které se sjednává spotřebitelský úvěr, musí (co se týče úročení) vždy obsahovat

- výpůjční úrokovou sazbu, podmínky upravující použití této sazby a případně údaj o jakémkoliv indexu nebo referenční **úrokové** sazbě použitelné pro počáteční úrokovou sazbu, jakož i o době, podmínkách a postupu pro změnu úrokové sazby. Uplatňují-li se za různých okolností různé úrokové sazby, uvádějí se výše uvedené informace o všech úrokových sazbách.

  Banka je povinna po dobu trvání spotřebitelského úvěru informovat klienta o každé změně výpůjční úrokové sazby, a to v přiměřeném předstihu před nabytím její účinnosti, jinak není tato změna vůči klientovi účinná. Informace zahrnují výši splátek po úpravě výpůjční úrokové sazby a četnost těchto splátek,
- roční procentní sazbu nákladů na spotřebitelský úvěr, veškeré předpoklady použité pro výpočet této sazby a celkovou částku splatnou spotřebitelem, vyjádřenou číselným údajem a vypočtenou k okamžiku uzavření smlouvy, ve které se sjednává spotřebitelský úvěr,

- výši, počet a četnost plateb, jež má klient provést, a případně způsob přiřazování plateb k jednotlivým dlužným částkám s různými úrokovými sazbami pro účely splácení.

Roční procentní sazba nákladů (RPSN) na spotřebitelský úvěr vyjadřuje celkové náklady spotřebitelského úvěru pro spotřebitele, vyjádřené jako roční procentní podíl z celkové výše spotřebitelského úvěru.

Základní rovnice, kterou se stanoví roční procentní sazba nákladů, odpovídá na ročním základě celkové současné hodnotě čerpání na jedné straně a celkové současné hodnot splátek a plateb poplatků na straně druhé,[27] tedy

$$\sum_{k=1}^{m} C_k \left(1+i_{RPSN}\right)^{-t_k} = \sum_{l=1}^{m'} D_l \left(1+i_{RPSN}\right)^{-t_l}, \qquad \textbf{(11-1)}$$

kde k je číslo čerpání úvěru, proto $1 < k < m$,
m je číslo posledního čerpání úvěru,
C_K je částka čerpání k,
t_K je interval vyjádřený v letech a zlomcích roku[28] mezi datem prvního čerpání a datem každého následného čerpání, proto $t_1 = 0$,
l je číslo splátky nebo platby poplatků,
m' je číslo poslední splátky nebo platby poplatků,
D_l je výše splátky nebo platby poplatků,
m' je číslo poslední splátky,
t_l je interval vyjádřený v letech a zlomcích roku mezi datem prvního čerpání a datem každé splátky nebo platby poplatků,
i_{RPSN} je roční procentní sazba nákladů na spotřebitelský úvěr[29].

[27] Jedná se o vyjádření efektivní úrokové sazby - viz kapitola 3.8.

[28] Časové intervaly použité ve výpočtech se vyjadřují v letech nebo ve zlomcích roku. Má se za to, že rok má 365 dní (nebo 366 dní u přestupných roků), 52 týdnů nebo 12 stejně dlouhých měsíců. Má se za to, že takový měsíc má 30,41666 dní (tzn. 365/12), a to bez ohledu na to, zda se jedná o přestupný rok.

[29] Roční průměrná sazba nákladů se vyjadřuje s přesností na nejméně jedno desetinné místo. Je-li hodnota číslice na následujícím desetinném místně větším nebo rovna 5, hodnota číslice na příslušeném desetinném místně se zvyšuje o jednu.

Ze vztahu 11-1 je patrné, že zohledňuje jak výši všech částek placených klientem a bankou, tak i termíny, ve kterých k těmto platbám dochází (to znamená, že bere v úvahu časovou hodnotou peněz). Proto RPSN lze považovat za přesné vyjádření celkových nákladů, které platí příjemce úvěru.

Výpočet roční procentní sazby nákladů je – kromě velmi jednoduchých případů – možné provádět iterativní metodou, která je založena na postupném dosazování hledané sazby, při které je výše uvedená rovnice platná.

Jestliže smlouva, ve které se sjednává spotřebitelský úvěr, umožňuje změnu úrokové sazby nebo změnu výše plateb s úvěrem souvisejících, které jsou zahrnuté do roční procentní sazby nákladů na spotřebitelský úvěr, avšak nelze je číselně vyjádřit v době výpočtu, má se pro účely výpočtu za to, že úroková sazba a ostatní platby zůstávají neměnné a budou platit do konce účinnosti této smlouvy.

Zákon o spotřebitelském úvěru obsahuje i ***sankci*** při nedodržení podmínek pro stanovení úročení i dalších náležitostí smlouvy vymezených zákonem. Jestliže smlouva, ve které se sjednává spotřebitelský úvěr,

- nemá písemnou formu,
- neobsahuje informace požadované zákonem, nebo
- nebyla alespoň v jednom vyhotovení poskytnuta klientovi v listinné podobě nebo na jiném trvalém nosiči dat,

a klient tuto skutečnost uplatní u věřitele, pokládá se spotřebitelský úvěr od počátku za úročený ve výši diskontní sazby platné v době uzavření této smlouvy uveřejněné Českou národní bankou a ujednání o jiných platbách na spotřebitelský úvěr jsou neplatná.

Příklad 11-1 *Roční průměrná sazba nákladů*

Porovnejte z hlediska nákladů pro klienta dvě varianty spotřebitelských úvěrů a rozhodněte, která pro něj bude výhodnější. V obou případech se jedná o úvěr ve výši 100 000 Kč jednorázově čerpaný se splatností 1 rok.

1. varianta

Za sjednání úvěru si banka účtuje poplatek 500 Kč (splatný při sjednání smlouvy), úvěr je splatný během jednoho roku ve čtyřech pravidelných čtvrtletních splátkách ve výši 27 000 Kč.

2. varianta

Za sjednání úvěru banka neúčtuje žádný poplatek, úvěr je splatný během jednoho roku ve dvanácti pravidelných měsíčních splátkách ve výši 9 000 Kč.

Řešení

Výhodnost určíme na základě porovnání roční procentní sazby nákladů u obou variant, kterou vypočítáme dle vztahu 11-1.

Pro 1. variantu bude RPSN možné určit z následující rovnice

$$100\,000\cdot\left(1+i_{RPSN}\right)^{-0}=500\cdot\left(1+i_{RPSN}\right)^{-0}+27\,000\cdot\left(1+i_{RPSN}\right)^{-\frac{1}{4}}+$$
$$+27\,000\cdot\left(1+i_{RPSN}\right)^{-\frac{2}{4}}+27\,000\cdot\left(1+i_{RPSN}\right)^{-\frac{3}{4}}+27\,000\cdot\left(1+i_{RPSN}\right)^{-\frac{4}{4}}.$$

Tato rovnice platí při úrokové sazbě $i_{RPSN}=0{,}1321$, a tedy hledaná výše RPSN činí 13,21 %.

Podobně pro 2. variantu budeme vycházet z rovnice

$$100\,000\cdot\left(1+i_{RPSN}\right)^{-0}=9\,000\cdot\left(1+i_{RPSN}\right)^{-\frac{1}{12}}+9\,000\cdot\left(1+i_{RPSN}\right)^{-\frac{2}{12}}+$$
$$+9\,000\cdot\left(1+i_{RPSN}\right)^{-\frac{3}{12}}+\ldots+9\,000\cdot\left(1+i_{RPSN}\right)^{-\frac{12}{12}}.$$

Tato rovnice platí při úrokové sazbě $i_{RPSN}=0{,}1545$, a tedy hledaná výše RPSN činí 15,45 %.

Z uvedeného vyplývá, že první varianta je z hlediska výše procentní roční sazby nákladů výhodnější než varianta druhá. Všimněte si, že tomu je tak i přesto, že celkový součet splátek je v obou případech stejný a u první varianty je navíc účtován poplatek za sjednání smlouvy.

12. Forfaiting, faktoring a leasing

Vedle klasických bankovních úvěrů mohou firmy i fyzické osoby využít dnes řadu alternativních způsobů financování svých potřeb. Mezi takové instrumenty patří forfaiting, faktoring a leasing. Jejich charakteristice a srovnání s klasickými bankovními úvěry je věnována tato kapitola.

12.1 Forfaiting

Forfaiting představuje odkup střednědobých až dlouhodobých pohledávek,[30] které obvykle vznikají při vývozu, eventuálně dovozu na dodavatelský úvěr. Při odkupu pohledávky přecházejí na subjekt kupující pohledávku – forfaitéra veškerá rizika, spojená s pohledávkou, to znamená úvěrové riziko (riziko nezaplacení pohledávky), jakož i další rizika (měnové, úrokové).

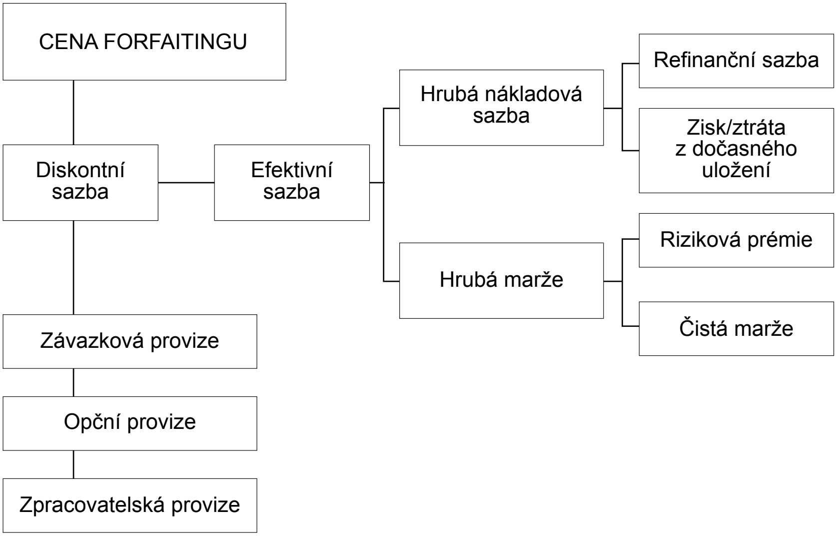
Pohledávky, které jsou předmětem forfaitingu, bývají zpravidla ve formě směnek opatřených avalem důvěryhodné banky. Odkup pohledávek probíhá na diskontní bázi, to znamená, že forfaitér odkupuje směnku před její splatností a vyplácí za ni částku sníženou o diskont. Svou povahou je tedy forfaiting blízký eskontnímu úvěru s tím rozdílem, že u eskontního úvěru zpravidla zůstává riziko neproplacení směnky na tom, kdo ji prodává.

Každou forfaitingovou operaci můžeme rozdělit do dvou fází: kontraktační a realizační. V kontraktační fázi jsou dohodnuty podmínky forfaitingu pohledávky. V průběhu realizační fáze dochází k samotnému prodeji pohledávky vývozcem a pro forfaitéra končí inkasem pohledávky.

12.1.1 Cena forfaitingu

Při odkupu pohledávek si forfaitér sráží z celkové výše pohledávky určitý diskont, eventuálně další provize a poplatky. Tato sražená částka – cena forfaitingu – potom představuje na jedné straně výnos z forfaitingu pro forfaitéra, na straně druhé náklady forfaitingu pro subjekt, prodávající pohledávku. Základní struktura ceny forfaitingu a faktory, které ji determinují, je znázorněna na obr. 12.1.

[30] Splatnost nebývá kratší než 90–180 dnů a může dosahovat až 5–8 let.



Obr. 12.1 Struktura ceny forfaitingu

Refinanční sazba

Refinanční sazba vychází z úrokových nákladů na refinancování odkupované pohledávky. Pokud je celá pohledávka splatná v jednom termínu, vychází se z úrokové sazby, odpovídající době splatnosti pohledávky.

Pokud je pohledávka rozdělena do několika splátek, je možné odvodit refinanční úrokovou sazbu různým způsobem:

- jako **vážený průměr z úrokových sazeb**, odpovídajících z hlediska splatnosti jednotlivých splátek, přičemž vahami jsou splatnosti těchto splátek; váženou průměrnou úrokovou sazbu potom můžeme vypočítat podle vztahu:

$$p_{\phi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i}, \qquad \textbf{(12-1)}$$

kde p_i je úroková sazba pro splatnost i-té splátky;
t_i je doba splatnosti i-té splátky;

- na základě **střední doby splatnosti** lze určit průměrnou refinanční sazbu jednoduchým způsobem tak, že touto sazbou je sazba odpovídající střední době splatnosti[31] celkové pohledávky.[32]

Zisk či ztráta z dočasného uložení

Pokud forfaitér fixuje klientovi sazbu, kterou si sráží z odkupované pohledávky, určitý čas před samotným odkupem pohledávky, musí si opatřit – pokud chce vyloučit úrokové riziko – adekvátní refinancování (a tedy i zafixovat refinanční sazbu) v okamžiku, kdy sazbu klientovi stanoví. Získané refinanční zdroje potom ukládá do doby jejich skutečného vynaložení na peněžním trhu. Obecně bude platit, že sazba, za kterou získal refinanční zdroje, bude odlišná od krátkodobé sazby na peněžním trhu (za kterou může tyto zdroje dočasně uložit). Z toho vyplývá, že (v závislosti na tvaru výnosové křivky a vzájemného vztahu mezi krátkodobými a střednědobými, resp. dlouhodobými úrokovými sazbami) může z uložení dosáhnout zisku či ztráty. Tento zisk (ztráta) se může promítnout do výsledné sazby, kterou si strhává při koupi pohledávky.

Hrubá nákladová sazba

Refinanční sazba upravená o ztrátu/zisk z dočasného uložení tvoří hrubou nákladovou sazbu. Hrubá nákladová sazba představuje základ efektivní forfaitové sazby.

---

31 Střední dobu splatnosti můžeme vypočítat přesným výpočtem jak je uvedeno v kapitole 12.3. Použít lze i zjednodušenou metodu, pomocí které lze vypočítat střední dobu splatnosti pohledávky rozložené do několika dílčích splátek jako aritmetický průměr doby splatnosti první (t_1) a poslední (t_n) splátky, to znamená

$$t_\phi = \frac{t_1 + t_n}{2}.$$

Tato zjednodušená metoda je použitelná (dává poměrně spolehlivý výsledek), pokud znějí splátky na stejné částky a jsou rozloženy rovnoměrně po celou dobu splatnosti.

32 Pokud taková sazba není přímo kotována, můžeme ji určit z výnosové křivky sestavené z kotovaných úrokových sazeb. Je-li např. střední doba splatnosti 2,75 let a máme úrokové sazby kotované pro splatnosti 2,5 roku 3,85 % a pro 3 roky 4,06 %, potom úroková sazba pro splatnost 2,75 let bude 3,96 % {=[(3,85 + 4,06) : (3 + 2,5)] · 2,75}.

Hrubá marže

Hrubá nákladová sazba musí být dále zvýšena o hrubou marži. Hrubá marže se skládá ze dvou základních složek:

- **riziková prémie** se odvíjí od rizikovosti pohledávky, která je předmětem odkupu – nejvýznamnějšími faktory determinujícími výši rizika jsou zejména bonita banky garantující pohledávku, riziko země dlužníka (garantující banky) a kvalita instrumentu ztělesňujícícího pohledávku;
- **čistá marže** pokrývá forfaitérovi na jedné straně související (neúrokové) náklady, jako např. personální či věcné, ale i náklady daňové apod., na straně druhé obsahuje i kalkulovaný forfaitérův zisk.

Efektivní sazba

Výsledná efektivní sazba stanovuje, jak velkou částku z hodnoty pohledávky musí forfaitér požadovat, aby pokryla jeho náklady a kalkulovaný zisk. Pro prodávajícího pohledávky (exportéra) naopak efektivní sazba ukazuje, jak velké úroky musí minimálně promítnout do ceny, aby na prodeji pohledávky forfaitérovi neprodělal.

Diskont

V rámci forfaitingu je standardní, že pohledávku proplácí forfaitér při jejím odkupu, přičemž si sráží příslušný diskont. Výše diskontu by měla pokrývat náklady a zisk forfaitéra, odpovídající efektivní sazbě.

Diskont, resp. diskontovanou hodnotu pohledávky, lze počítat různým způsobem; za základní lze považovat metodu přímého diskontu a metodu diskontu měřeného výnosem.[33]

Metoda přímého diskontu (*straight discount*) je založena na tom, že se vypočítá výše diskontu metodou obchodního diskontu za celou dobu splatnosti a ten se poté odečte z výše pohledávky:

$$D_{SD} = \frac{NH \cdot (t + t_{GD}) \cdot p_D}{100 \cdot 360}, \qquad \textbf{(12-2)}$$

[33] V úvahu přichází i metoda průměrné délky dluhu (average life), jejíž podstatu jsme vysvětlili v kapitole 7.2.

kde D_{SD} je diskont počítaný metodou *straight discount*;
NH je nominální hodnota pohledávky;
t je doba splatnosti pohledávky ve dnech;
t_{GD} jsou *grace days*;
p_D je diskontní sazba v % p.a.

Diskontovanou hodnotu pohledávky, tedy částku, kterou vyplácí forfaitér při odkupu, dostaneme tak, že diskont odečteme od nominální hodnoty pohledávky.

Při výpočtu diskontu se obvykle sjednaná doba splatnosti pohledávky prodlužuje o několik dnů[34] (*grace days*, *extra days*), což přirozeně zvyšuje výši sráženého diskontu forfaitérem. Důvod zahrnutí těchto dnů navíc spočívá v tom, že ke skutečnému připsání peněz na účet forfaitéra dochází obvykle o několik dnů později, než nastává splatnost pohledávky.[35]

Příklad 12-1 *Výpočet diskontu pomocí metody straight discount*

Banka – forfaitér odkupuje dne 12. dubna 2013 od svého klienta pohledávku za následujících podmínek: splatnost pohledávky je 11. dubna 2014, metodou diskontu je *straight discount annualy*, diskontní sazba činí 6 % p.a., *grace days* je sedm dnů, úroková metoda 365/360, výše pohledávky činí 172 500 euro. Jaká bude částka vyplacená forfaitérem při odkupu pohledávky?

Řešení

Výši diskontu vypočítáme dle vztahu (12-2):

$$D_{SD} = \frac{NH \cdot (t + t_{GD}) \cdot p_D}{100 \cdot 360} = \frac{172\,500 \cdot (365 + 5) \cdot 6}{100 \cdot 360} = 10\,637.$$

Částku, kterou forfaitér vyplatí, získáme odečtením diskontu od nominální hodnoty pohledávky:

$$DH = NH - D_{SD} = 172\,500 - 10\,637 = 161\,863.$$

---

[34] Obvykle mezi 3 až 15 dny.

[35] Délka tohoto zpoždění závisí především na místě splatnosti pohledávky a sídle forfaitéra, platebních usancích atd. Od tohoto zpoždění se potom odvíjí i počet grace days.

Diskont měřený výnosem (*discount to yield*) určuje diskontovanou výši pohledávky jako současnou hodnotu v budoucnu splatné pohledávky:

$$D_{DTY} = NH \cdot \frac{1}{1+\frac{p_{DTY} \cdot t_1}{100 \cdot 360}} \cdot \frac{1}{1+\frac{p_{DTY} \cdot t_2}{100 \cdot 360}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1+\frac{p_{DTY} \cdot t_n}{100 \cdot 360}}, \qquad \textbf{(12-3)}$$

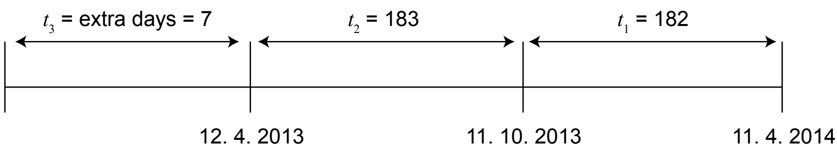
kde NH je nominální hodnota pohledávky;
p_{DTY} je diskontní sazba metody *discount to yield* v % p.a.;
$t_{1} \ldots n$ jsou jednotlivá půlroční (roční)[36] dílčí období, do kterých je rozdělena celková doba splatnosti pohledávky.

Příklad 12-2 *Výpočet diskontu pomocí metody discount to yield*

Banka – forfaitér odkupuje dne 12. dubna 2013 od svého klienta pohledávku za následujících podmínek: splatnost pohledávky je 11. dubna 2014, metodou diskontu je *discount to yield – semi annualy*, diskontní sazba činí 6 % p.a., *grace days* je sedm dnů, úroková metoda 365/360 a výše pohledávky činí 172 500 euro. Jaká bude částka vyplacená forfaitérem při odkupu pohledávky?

Řešení

Celkovou dobu splatnosti pohledávky rozdělíme ode dne splatnosti do jednotlivých půlročních období (viz obr. 12.2).



Obrázek 12.2 Rozdělení doby splatnosti pohledávky (příklad 12-2)

[36] Diskontování může být prováděno „annually“, kdy je pohledávka diskontována po ročních obdobích, nebo „semi-annually“, kdy jsou tato období půlroční.

Výši diskontované hodnoty pohledávky vypočítáme dle vztahu (12-3):

$$DH_{DTY} = NH \cdot \frac{1}{1+\frac{6\cdot 182}{100\cdot 360}} \cdot \frac{1}{1+\frac{6\cdot 183}{100\cdot 360}} \cdot \frac{1}{1+\frac{6\cdot 7}{100\cdot 360}} = 162\,277.$$

Forfaitér vyplatí klientovi při odkupu pohledávky částku 162 277 euro.

Přepočet diskontních sazeb

Z podstaty obou metod vyplývá, že při stejné sazbě bychom dostali různou výši diskontované částky. Porovnáním obou metod lze odvodit vzájemné vztahy mezi výší diskontní sazby u metody *straight discount* a metody *discount to yield* (efektivní sazby), při kterých je výsledná diskontovaná částka shodná.

Z dané efektivní sazby je možné vypočítat odpovídající diskontní sazbu dle následujícího vztahu (při ročním úročení):

$$p_{SD} = \frac{100 \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{p_{EF}}{100}\right)^{n}}\right)}{n}. \qquad \textbf{(12-4)}$$

Naopak z dané diskontní sazby můžeme vypočítat odpovídající efektivní sazbu dle vztahu:

$$p_{EF} = \left(\sqrt[n]{\frac{100}{100-(p_{SD}\cdot n)}} - 1\right)\cdot 100, \qquad \textbf{(12-5)}$$

kde p_{SD} je diskontní sazba při metodě přímého diskontu v % p.a.;
p_{EF} je efektivní sazba v % p.a.;
n je střední doba splatnosti v letech.

Další složky ceny forfaitingu

Sražený diskont mohou (pokud již nebyly zahrnuty přímo do diskontu) dále zvyšovat některé provize a poplatky:

- **závazková provize** (*commitment fee*) je provize, kterou si účtuje forfaitér za držbu pohotových finančních prostředků v době od sjednání forfaitingového kontraktu do skutečného předání platebních instrumentů; sjednává se obvykle v procentech na roční bázi a bývá splatná měsíčně;
- **opční provize** (*option fee*) je účtována forfaitérem v tom případě, kdy vývozce získává opci (tzn. právo, nikoliv však povinnost) na uzavření forfaitingové smlouvy během určité doby (zpravidla ne delší než jeden měsíc) za předem pevně stanovených podmínek;
- **zpracovatelská provize** (*management fee*) pokrývá náklady forfaitéra na zpracování forfaitingového případu; její výše závisí na jeho celkové složitosti.

12.2 Faktoring

Faktoring je smluvně sjednaný průběžný odkup krátkodobých pohledávek, které vznikly dodavateli v důsledku poskytnutí nezajištěného dodavatelského úvěru.

Odkup pohledávek provádí faktoringová společnost (banka) buď bez možnosti zpětného regresu na dodavatele (riziko nezaplacení pohledávky přechází na faktoringovou společnost), nebo s možností zpětného regresu (riziko nezaplacení zůstává na dodavateli); využívá se i varianta, kdy se riziko nezaplacení v dohodnutém poměru dělí mezi faktoringovou společnost a dodavatele.

Předmětem odkupu jsou pohledávky, které obvykle splňují následující charakteristiky:

- doba splatnosti pohledávek nepřesahuje 180 dní;
- pohledávka vznikla na základě dodavatelského nezajištěného úvěru;
- nesmí s ní být spojena žádná práva třetích osob (např. možnost vzájemné kompenzace pohledávek);

- musí existovat možnost postoupení (cese) pohledávky;
- pohledávka je za subjektem pro faktoringovou společnost s akceptovatelnou bonitou a z přijatelné země.

Faktoring se může vyskytovat v různých formách a plnit tak pro majitele pohledávek různé funkce. Za základní **důvody využití faktoringu** lze považovat:

- **eliminaci úvěrového rizika** – u bezregresního faktoringu prodává pohledávku její majitel včetně rizika jejího nezaplacení, neboli faktoringová společnost proplácí pohledávku (ve formě tzv. garanční platby) i v případě, kdy není ze strany dlužníka řádně zaplacena;
- **financování pohledávek** – u faktoringu s předfinancováním dostává majitel pohledávky proplacenu dohodnutou část okamžitě při jejím prodeji faktoringové společnosti; získává tak úvěr, kterým může krýt své obchodní pohledávky.

12.2.1 Cena faktoringu

Cena faktoringu se v závislosti na rozsahu funkcí, které faktoring plní, skládá z následujících položek:

Faktoringová provize – zahrnuje dvě složky. První, tzv. **riziková složka,** vyplývá z převzetí úvěrového rizika faktoringovou společností (proto se týká pouze bezregresního faktoringu). Závisí zejména na bonitě odběratele, na jeho dřívější platební morálce, na objemu pochybných pohledávek vzhledem k celkovému obratu, na počtu reklamací apod. Druhá složka pokrývá faktoringové společnosti **náklady spojené se zpracováním** faktoringu. Závisí na rozsahu a pracnosti administrativních a dalších činností, které jsou s faktoringem spojené. Je ovlivněna zejména celkovým ročním obratem, počtem a průměrnou výší pohledávek, počtem odběratelů, dobou splatnosti pohledávek atd.

Výše faktoringové provize se pohybuje přibližně mezi 0,2 až 3 % z výše odkupované pohledávky.

Úrok se vyskytuje v těch případech, kdy je faktoring spojen s předfinancováním. Výše úrokové sazby odpovídá přibližně úrokovým sazbám z krátkodobých bankovních úvěrů a závisí především na refinančních nákladech faktoringové společnosti.

Pokud bude faktoring využíván klientem k financování pohledávek (jako alternativa úvěru), potom vyvstává potřeba porovnat výhodnost faktoringu např. s úvěrem. Při porovnání je třeba vzít v úvahu dvě charakteristiky faktoringu:

- faktoringová provize je placena předem;
- výše faktoringové provize není uváděna na roční bázi.

Skutečnou cenu faktoringu je možné vyjádřit jako vnitřní míru výnosu.[37] Rovnici pro výpočet vnitřní míry výnosu sestavíme tak, že navzájem porovnáme současnou hodnotu (např. ke dni odkupu pohledávky) cash flow, které faktoringová společnost dostává (faktoringová provize, úrok, úhrada pohledávky) a naopak platí (předfinancování). Pro vnitřní míru výnosu potom musí platit:

$$NH_{T0} = FP + \frac{u + NH_{T1}}{\left(1 + i_F\right)^n}, \qquad \textbf{(12-6)}$$

kde NH_{T0} je výše pohledávky proplácená faktoringovou společností jako předfinancování;
FP je faktoringová provize v absolutním vyjádření placená při odkupu pohledávky;
NH_{T1} je nominální hodnota pohledávky zaplacená v době její splatnosti;
n je doba splatnosti pohledávky v letech;
u je úrok z předfinancování placený v době splatnosti pohledávky;
i_F je vnitřní výnosová míra faktoringu.

Úpravou vztahu vyjádříme vnitřní výnosovou míru:

$$i_F = \sqrt[n]{\frac{u + NH_{T1}}{NH_{T0} - FP}} - 1. \qquad \textbf{(12-7)}$$

Obdobně můžeme vyjádřit i vnitřní výnosovou míru pro alternativní úvěr a na základě jejich porovnání je možné určit výhodnější variantu financování:

37 Viz oddíl 3.4.

$$i_U = \sqrt[n]{\frac{u + NH_{T1}}{NH_{T0}}} - 1, \qquad \textbf{(12-8)}$$

kde NH_{T0} je výše poskytnutého úvěru;
NH_{T1} je výše spláceného úvěru;
i_U je vnitřní výnosová míra úvěru;
u je výše úroku z úvěru.

Příklad 12-3

Srovnejte výhodnost refinancování poskytnutého dodavatelského úvěru ve výši 10 mil. Kč se splatností tři měsíce krátkodobým bankovním úvěrem nebo pomocí faktoringu, pokud banka a faktoringová společnost nabízejí následující podmínky:

Faktoring		**Úvěr**	
faktoringová provize	0,5 %	úroková sazba p.a.	6 %
úroková sazba z předfinancování	5 % p.a.		
výše předfinancování	90 %		

Řešení

Pro zjednodušení budeme porovnávat pouze částku odpovídající výši předfinancování (9 mil. Kč). Pro faktoring dle vztahu (12-2) je výše vnitřní výnosové míry:

$$i_F = \sqrt[n]{\frac{u + NH_{T1}}{NH_{T0} - FP}} - 1 = \sqrt[0,25]{\frac{(0,05 \cdot 9\,000\,000 \cdot 0,25) + 9\,000\,000}{9\,000\,000 - 50\,000}} - 1 = 7,5\ \%.$$

Pro financování prostřednictvím bankovního úvěru potom dle vztahu (12-3):

$$i_U = \sqrt[n]{\frac{u + NH_{T1}}{NH_{T0}}} - 1 = \sqrt[0,25]{\frac{(0,06 \cdot 9\,000\,000 \cdot 0,25) + 9\,000\,000}{9\,000\,000}} - 1 = 6,1\ \%.$$

Vzhledem k tomu, že vnitřní míra výnosu je u faktoringu vyšší, je financování prostřednictvím faktoringu cenově méně výhodné než krátkodobý bankovní úvěr.

12.3 Leasing

Leasing představuje další alternativní variantu financování ve vztahu k bankovním úvěrům.

Je možné jej charakterizovat jako určitou formu pronájmu, kdy pronajímatel – leasingová společnost – pronajímá předmět leasingu nájemci na určitou dobu a ten se zavazuje platit dohodnuté leasingové splátky. U leasingu tak dochází k oddělení vlastnictví a užívání majetku – nájemce majetek užívá, ale nevlastní, pronajímatel majetek vlastní, ale neužívá.

Leasing se může vyskytovat v řadě různých variant, obvykle se rozlišují dva základní **typy leasingu:**

- **Finanční leasing** je charakteristický tím, že se jedná o pronájem předmětu po dobu blížící se životnosti předmětu obvykle s možností přechodu předmětu do vlastnictví nájemce. Nájemce obvykle platí řadu leasingových splátek, které se ve svém součtu rovnají ceně pronajímaného předmětu nebo ji převyšují.
- **Operativní (provozní) leasing** bývá uzavírán obvykle na období, které je mnohem kratší, než je životnost pronajímaného předmětu. Tohoto druhu leasingu se využívá, chce-li nájemce využívat předmět jen krátkodobě a nepředpokládá se zde převedení předmětu do vlastnictví nájemce.

S využitím leasingu je pro nájemce spojena řada výhod, ale i nevýhod. Za hlavní **výhody** leasingu je možné považovat:

- není nutno najednou vynaložit celou sumu na pořízení investice;
- leasingové splátky je možno rozvrhnout tak, aby kopírovaly výnosy vzniklé díky pořizované investici;
- pořizovaný předmět leasingu lze obvykle do nákladů formou leasingových splátek promítnout dříve, než kdyby byl pořizován jiným způsobem.

Na druhé straně za hlavní **nevýhody** leasingu se považují zejména:

- může být příliš drahý z pohledu subjektů, které mají přístup k výhodným úvěrům;

- je nutný souhlas pronajímatele jakožto vlastníka v případě provádění jakékoli úpravy předmětu leasingu;
- nepřináší-li předmět očekávaný efekt, popř. i z jiných důvodů, je možno od smlouvy ustoupit obvykle pouze za úhradu sankčního poplatku; není tedy možné předmět prodat jako v případě pořízení např. na úvěr.

Srovnání leasingu a úvěru

Pokud je rozhodnuto o realizaci určité investice, je třeba zvolit i optimální způsob jejího financování. Předpokládejme možnost financování buď bankovním úvěrem nebo prostřednictvím leasingu (obdobně lze porovnávat výhodnost leasingu např. i s financováním z vlastních zdrojů apod.). K výběru výhodnější alternativy se obvykle využívá porovnání čistých současných hodnot peněžních toků obou těchto variant. Nejprve tedy vymezíme peněžní toky spojené s oběma alternativami (budeme pro zjednodušení uvažovat pouze základní peněžní toky, shodně by však bylo možné uvažovat i další).

Z **leasingového financování** vyplývají zejména následující peněžní toky:

- platba akontace, která je placena na počátku leasingu;
- pravidelné leasingové splátky;
- platba zůstatkové ceny při ukončení leasingu a zakoupení najaté věci.

Všechny tři formy plateb jsou – za předpokladu souladu se zákonem o daních z příjmů – daňově uznatelným výdajem.

Naproti tomu z **úvěrového financování** pro dlužníka obvykle vyplývají následující hlavní peněžní toky:

- splátky poskytnutého úvěru;
- platba úroků, která je daňově uznatelným výdajem;
- odpisy, které je možné zahrnovat jako nepeněžní výdaj do daňově uznatelných výdajů.

Čistou současnou hodnotu peněžních toků spojených s leasingem můžeme vyjádřit jako:

$$\check{C}SH_L = \sum_{t=1}^{n} \left[\frac{(1-d)\cdot(S_t - C_t - L_t) + \frac{L_0}{n}\cdot d}{(1+i)^t} \right] - L_0 - \frac{ZC\cdot(1-d)}{(1+i)^n}, \qquad \textbf{(12-9)}$$

kde $\check{C}SH_L$ je čistá současná hodnota peněžních toků spojených s leasingem;
d je daňová sazba daně z příjmů;
S_t jsou výnosy spojené s pořizovanou investicí;
C_t jsou náklady nutné k fungování pořizované investice;
L_t jsou leasingové splátky;
t jsou jednotlivé termíny peněžních toků;
i je úroková sazba;
n je doba trvání leasingu;
L_0 je akontace (mimořádná první splátka);
ZC je zůstatková cena.

Naopak při zakoupení na úvěr[38] je čistá současná hodnota peněžních toků spojených s úvěrem následující:[39]

$$\check{C}SH_U = \sum_{t=1}^{n} \frac{(1-d)\cdot(S_t - C_t - O_t - U_t) + O_t - UM_t}{(1+i)^t}, \qquad \textbf{(12-10)}$$

kde $\check{C}SH_U$ je čistá současná hodnota peněžních toků spojených s úvěrem;
d je daňová sazba daně z příjmů;
S_t jsou výnosy spojené s pořizovanou investicí;
C_t jsou náklady nutné k fungování pořizované investice;
O_t jsou odpisy;
U_t jsou placené úroky z úvěru;
UM_t jsou splátky jistiny úvěru (úmor);
t jsou jednotlivé termíny peněžních toků;
i je úroková sazba.

38 Uvažujeme úvěr, který je časově rozložen shodně jako leasing.

39 Odpisy se ve vzorci odečítají a současně přičítají, protože se jedná o daňově uznatelný finanční náklad, ale nepředstavují skutečný peněžní výdaj.

Výhodnější variantou bude ta, která bude mít vyšší čistou současnou hodnotu. Porovnáním obou variant dostaneme tzv. **čistou výhodu leasingu:**

$$ČSH_{L-U} = \sum_{t=1}^{n}\left[\frac{(1-d)\cdot(S_t - C_t - L_t) + \frac{L_0}{n}\cdot d}{(1+i)^t}\right] - L_0 - \frac{ZC\cdot(1-d)}{(1+i)^n} -$$
$$-\sum_{t=1}^{n}\frac{(1-d)\cdot(S_t - C_t - O_t - U_t) + O_t - UM_t}{(1+i)^t}, \qquad \textbf{(12-11)}$$

tedy:

$$ČSH_{L-U} = \sum_{t=1}^{n}\left[\frac{-L_t + U_t + UM_t + d\cdot(L_t - U_t + \frac{L_0}{n} - O_t)}{(1+i)^t}\right] -$$
$$-L_0 - \frac{ZC\cdot(1-d)}{(1+i)^n}. \qquad \textbf{(12-12)}$$

Pokud bude tedy čistá výhoda leasingu kladná, potom bude výhodnější financování leasingem, v opačném případě je lepší nákup na úvěr.

Příklad 12-4 *Srovnání leasingu a úvěru*

Porovnejte jako právnická osoba výhodnost zakoupení osobního automobilu v pořizovací ceně 300 000 Kč na úvěr a na leasing, pokud banka a leasingová společnost nabízejí následující podmínky:

Leasing		**Úvěr**	
Akontace (první mimořádná platba nájemného)	90 000 Kč	Úroková sazba p.a.	10 %
Leasingové splátky (běžné roční nájemné)	51 096 Kč	Doba splatnosti	5 let
Doba trvání leasingu	5 let (počátek k 1. 1.)	Roční úmor	60 000 Kč
Zůstatková cena při ukončení leasingu	1000		

Pro výpočet dále uvažujme lineární způsob odpisování dle zákona o dani z příjmů, kdy pro první rok odpisování ve druhé odpisové skupině je stanovena odpisová sazba 11 % a další roky 22,25 %, a sazbu daně z příjmů 19 %.

Řešení

Výhodnost obou variant posoudíme na základě čisté výhody leasingu dle vzorce (12-12)[40]. Údaje pro výpočet pro přehlednost uspořádáme do tabulky.

Rok t	0	1	2	3	4	5
Běžné leasingové splátky L_t		51 096	51 096	51 096	51 096	51 096
Úroky z úvěru U_t		30 000	24 000	18 000	12 000	6 000
Úmor UM_t		60 000	60 000	60 000	60 000	60 000
Časové rozlišení akontace L_0/n		18 000	18 000	18 000	18 000	18 000
Odpisy O_t		33 000	66 750	66 750	66 750	66 750
Akontace L_0	90 000					
Zůstatková cena ZC						1 000
Diskontní faktor $(1 + i)^t$	1,00	1,08	1,17	1,26	1,36	1,47
Čistá výhoda leasingu	13 632,22					

Vzhledem k tomu, že čistá výhoda leasingu je kladná, jeví se jako výhodnější financování prostřednictvím leasingu.

[40] Diskontní sazbu uvažujeme ve výši sazby z úvěru upravenou o zdanění, tj. 10 % · (1 – 0,19) = 8,1 %.

13. Dluhopisy

Dluhopis (obligace, bond) je cenný papír, který vyjadřuje dlužnický závazek emitenta vůči oprávněnému majiteli dluhopisu. Majitel dluhopisu má nárok požadovat po emitentovi splacení jmenovité (nominální) hodnoty v době splatnosti dluhopisu a v určených termínech i stanovených výnosů.

Dluhopisy mohou být členěny podle řady různých charakteristik, za nejdůležitější lze určitě považovat dobu splatnosti, způsob stanovení výnosů, druh emitenta, způsob převoditelnosti a sekundární obchodovatelnosti i formu, v jaké jsou emitovány.

V době splatnosti dochází ke splacení jmenovité hodnoty dluhopisu, z hlediska délky doby do **splatnosti** potom můžeme rozlišovat dluhopisy:

- **krátkodobé**, které mají splatnost stanovenou do jednoho roku;
- **střednědobé** se splatností od jednoho do čtyř let;
- **dlouhodobé** se splatností delší než čtyři roky;
- **věčné renty** neboli **konzoly**, speciální druhy dluhopisů, které nemají stanovenou splatnost, to znamená, že u nich nikdy nedochází ke splacení jmenovité hodnoty, jsou vypláceny pouze úrokové výnosy.[41]

Splatnost dluhopisů může být v emisních podmínkách modifikována zvláštními právy emitenta či dlužníka. Emitent si může vyhradit právo na předčasné splacení dluhopisů (**dluhopisy s call opcí**) nebo naopak může být toto právo dáno majiteli dluhopisu (**dluhopisy s put opcí**).

Podle **formy a způsobu stanovení výnosu** plynoucího z dluhopisu můžeme rozlišovat tyto základní formy dluhopisů:

- **dluhopisy s pevnou úrokovou (kuponovou) sazbou** mají stanovenou výši úrokové (kuponové) sazby fixně po celou dobu do splatnosti dluhopisu; tato sazba (a tedy i výnos plynoucí z dluhopisu) je nezávislá na vývoji tržních úrokových sazeb, emitent nemá možnost sazbu během doby splatnosti změnit;
- **dluhopisy s pohyblivou úrokovou (kuponovou) sazbou** mají úrokovou sazbu vázanou na předem přesně určenou tržní referenční

[41] Tento typ dluhopisů není v praxi vůbec obvyklý, v minulosti byly emitovány např. ve Velké Británii v době napoleonských válek.

úrokovou sazbu – nejčastěji se jedná o úrokovou sazbu typu PRIBOR, LIBOR[42] apod.; úroková sazba z dluhopisu se potom pravidelně stanoveným způsobem přizpůsobuje výši referenční tržní úrokové sazby v předem pevně daných termínech;

- **dluhopisy s nulovou úrokovou (kuponovou) sazbou** (nulovým kuponem), označované často také jako **zerobondy**, nedávají majiteli během doby do splatnosti žádný úrokový výnos. Výnos pro majitele plyne z rozdílu mezi nižší (diskontovanou) cenou, za kterou jsou při emisi prodávány (emisním kurzem), a jmenovitou hodnotou, která je vyplacena v době splatnosti;
- **dluhopisy se slosovatelnou prémií** nebo **prémií v závislosti na lhůtě splatnosti** dluhopisu mají výnos stanoven ve formě prémie, jejíž výše, způsob stanovení a další náležitosti jsou stanoveny v emisních podmínkách.

Vedle výše uvedených výnosů mohou dávat některé speciální formy dluhopisů majiteli určitá dodatečná práva. V tomto směru jsou nejvýznamnější dva druhy dluhopisů:

- **konvertibilní** neboli **směnitelné dluhopisy** dávají majiteli právo volby v době splatnosti mezi splacením jmenovité hodnoty dluhopisu nebo jejich výměnou za stanovený počet akcií emitenta;
- **opční dluhopisy** obsahují vedle samotného dluhopisu ještě tzv. **opční list** (*warrant*), na jehož základě má jeho majitel právo – opci na koupi (eventuálně prodej) stanoveného finančního instrumentu (často akcie emitenta) za stanovených podmínek (cena, termín, množství). Opční list se může od dluhopisu oddělit a být obchodován samostatně, může být emitován i samostatně bez dluhopisu.

Emitentem dluhopisu může být právnická osoba (popř. též fyzická osoba, která je bankou s místem podnikání na území státu EU nebo EHP a která na území ČR podniká na základě jednotné bankovní licence). Emitent může vydat dluhopisy, pokud ČNB schválí emisní podmínky dluhopisů. V praxi lze za **nejvýznamnější emitenty** dluhopisů považovat:

- **stát** – emituje jednak **krátkodobé státní pokladniční poukázky** k pokrytí krátkodobého nesouladu mezi příjmy a výdaji ve státním

---

42 PRIBOR je zkratkou *Prague Interbank Offered Rate* (LIBOR potom pro London ... apod.) a znamená stanoveným způsobem určenou průměrnou úrokovou sazbu, za kterou se na příslušném peněžním trhu obchodují peníze mezi nejvýznamnějšími bankami.

rozpočtu, jednak **dlouhodobé státní dluhopisy**, které slouží k financování dlouhodobějších státních výdajů;

- **obce a města** – emitují tzv. **komunální obligace**, které obvykle mají dlouhodobější povahu a slouží k financování rozvojových potřeb měst a obcí;
- **banky** – jsou významným emitentem celé řady různých dluhopisů, které můžeme zařadit do následujících skupin:
  - **poukázky emitované Českou národní bankou** jsou krátkodobé dluhopisy, sloužící jako měnově-politický nástroj využívaný zejména v rámci repo operací k regulaci množství peněz v oběhu;
  - **dlouhodobé bankovní dluhopisy** slouží bankám k získávání dlouhodobých zdrojů ke krytí aktivních obchodů bank; jsou emitovány v jednorázových rozsáhlých emisích a zpravidla jsou dobře sekundárně obchodovatelné;
  - **hypoteční zástavní listy** mohou být emitovány bankami pouze na základě speciální licence; je pro ně charakteristické to, že zdroje z nich plynoucí může banka použít pouze na poskytování hypotečních úvěrů;
- **podnikový sektor** – je také významným emitentem dluhopisů, avšak schopnost umístit (prodat) na trhu vlastní dluhopisy mají pouze velmi bonitní, zpravidla větší firmy, kde je riziko nesplacení dluhopisů relativně malé. Může se jednat o **dlouhodobé dluhopisy**, ale i o krátkodobé **komerční papíry**, obvykle opakovaně emitované.

Majitel dluhopisu může dluhopis a práva s ním spojená převádět na jiné osoby. Z hlediska **způsobu převoditelnosti** se rozlišují tři druhy dluhopisů:

- **dluhopisy na majitele** (doručitele) mohou být převáděny pouhým předáním dluhopisu;
- **dluhopisy na řad** se převádějí indosamentem (rubopisem) a předáním;
- **dluhopisy na jméno** v zásadě převádět plnohodnotně nejde, do určité míry je možný převod práv pouze postoupením (cesí).

Z hlediska **formy** se dluhopisy mohou vyskytovat ve dvou podobách:

- **zaknihované** dluhopisy jsou vedeny pouze na účtech příslušné instituce, která je dle zákona oprávněna k vedení evidence zaknihovaných cenných papírů;

- **listinné cenné papíry** jsou fyzicky vydány. Dluhopis se skládá obvykle z pláště a kuponového archu s talonem. **Plášť** obsahuje údaje o emitentovi, jmenovitou hodnotu dluhopisu, datum splatnosti, výši a termíny vyplácení úrokových výnosů a jiné údaje. **Kuponový arch** s talonem obsahuje kupony k inkasu splatných úrokových výnosů a **talon** sloužící k získání nového kuponového archu v případě, že původní kuponový arch neobsahoval kupony na všechny úrokové platby až do splatnosti dluhopisu.

13.1 Cena dluhopisu

Jak jsme již uvedli, každý dluhopis musí mít stanovenou jmenovitou hodnotu, určující částku, která bude vyplacena majiteli dluhopisu v době splatnosti. Z jmenovité hodnoty se rovněž odvozuje absolutní výše úrokového výnosu, plynoucího z dluhopisu.

V případě, že dluhopis je předmětem obchodů na sekundárním trhu, je obchodován za svoji tržní cenu. **Tržní cena dluhopisu** je obecně dána stavem nabídky a poptávky na trhu, které jsou ovlivňovány řadou faktorů.

Teoretickou cenu dluhopisu můžeme odvodit z podstaty dluhopisu jako cenného papíru, ze kterého plynou majiteli během doby do splatnosti určité výnosy a v době splatnosti jmenovitá hodnota. Teoretická cena dluhopisu potom není nic jiného, než současná hodnota všech budoucích plateb, plynoucích z daného dluhopisu.

Pokud zůstaneme u nejjednoduššího, ale zároveň nejobvyklejšího dluhopisu – **dluhopisu s pevnou úrokovou sazbou** s nárokem na vyplacení jmenovité hodnoty v době splatnosti, bez dodatečných práv – můžeme teoretickou cenu jako současnou hodnotu všech budoucích plateb plynoucích z dluhopisu stanovit jako:

$$P = \frac{C}{1+i} + \frac{C}{(1+i)^2} + \frac{C}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{C}{(1+i)^n} + \frac{JH}{(1+i)^n}, \qquad \textbf{(13-1)}$$

kde P je teoretická cena dluhopisu jako současná hodnota budoucích plateb z dluhopisu;
C je roční kuponová úroková platba;
JH je jmenovitá hodnota dluhopisu;

i je tržní úroková sazba jako desetinné číslo p.a.;
n je doba do splatnosti dluhopisu v letech.

Vzhledem k tomu, že pravidelné úrokové výnosy z dluhopisu můžeme chápat jako výplatu důchodu, je možno výraz (13-1) upravit podle vztahu (5-2) pro výpočet počáteční hodnoty důchodu. Cenu dluhopisu potom můžeme po úpravách vyjádřit jako:

$$P = \frac{C \cdot (1+i)^n - C + JH \cdot i}{i \cdot (1+i)^n}. \qquad \textbf{(13-2)}$$

Z výše uvedených výrazů pro výpočet teoretické ceny dluhopisu s pevnou kuponovou sazbou vyplývají následující vztahy:

- vzroste-li tržní úroková sazba i, klesne cena dluhopisu P,
- rovná-li se kuponová sazba k úrokové míře i, rovná se cena dluhopisu P jmenovité hodnotě JH,
- je-li kuponová sazba k větší než úroková sazba i, je cena dluhopisu P větší než jmenovitá hodnota JH.

Příklad 13-1 *Teoretická cena dluhopisu s pevnou kuponovou úrokovou platbou*

Vypočítejte teoretickou cenu dluhopisu s pevnou kuponovou platbou s kuponovou sazbou 5 % p.a., s jmenovitou hodnotou 1 000 Kč, se splatností tři roky a při tržní úrokové míře 5,5 %.

Řešení

Teoretickou cenu vypočítáme podle vztahu (13-2):

$$P = \frac{C \cdot (1+i)^n - C + JH \cdot i}{i \cdot (1+i)^n} = \frac{50 \cdot (1+0{,}055)^3 - 50 + 1\,000 \cdot 0{,}055}{0{,}055 \cdot (1+0{,}055)^3} = 986{,}5.$$

Teoretická cena dluhopisu činí 986,50 Kč, to je 98,65 %.

Výpočet teoretické ceny **dluhopisu s nulovým kuponem** je jednodušší, protože tento dluhopis není spojen se žádnými úrokovými platbami během doby do splatnosti dluhopisu, ale pouze s výplatou jmenovité hodnoty v době splatnosti. Teoretickou cenu dluhopisu s nulovým kuponem proto určíme jako současnou hodnotu jmenovité hodnoty splatné v době splatnosti, to znamená:

$$P_{NK} = \frac{JH}{(1+i)^n}, \qquad \textbf{(13-3)}$$

kde P_{NK} je teoretická cena dluhopisu s nulovým kuponem;
JH je jmenovitá hodnota dluhopisu;
i je tržní úroková sazba, vyjádřená jako desetinné číslo p.a.;
n je doba do splatnosti dluhopisu v letech.

Příklad 13-2 *Teoretická cena dluhopisu s nulovým kuponem*

Vypočítejte teoretickou cenu dluhopisu s nulovým kuponem se splatností dva roky, jmenovitá hodnota dluhopisu činí 1 000 Kč, při tržní úrokové míře 5,5 % p.a.

Řešení

Teoretickou cenu určíme dosazením do vztahu (13-3):

$$P_{NK} = \frac{JH}{(1+i)^n} = \frac{1\,000}{(1+0{,}055)^2} = 898{,}45.$$

Teoretická cena (kurz) dluhopisu činí 898,45 Kč, to je 89,85 %.

Teoretická cena **dluhopisu bez splatnosti,** tzv. věčné renty, je dána rovněž vzorcem (13-1). Je však modifikována tím, že zde není splacena jmenovitá hodnota a doba splatnosti je nekonečná ($n \to \infty$). Současná hodnota budoucích výnosů tak získává tvar nekonečné geometrické řady; podle vzorce pro součet geometrické řady potom pro teoretickou cenu platí výraz pro současnou hodnotu věčného důchodu (5-13):

$$P = \frac{C}{i}, \qquad \textbf{(13-4)}$$

kde P je teoretická cena dluhopisu jako současná hodnota budoucích výnosů;
C je roční kuponová úroková platba;
i je tržní úroková sazba, vyjádřená jako desetinné číslo.

13.1.1 Způsob kotace ceny dluhopisů

Ceny dluhopisů, o kterých jsme dosud hovořili, byly v absolutním vyjádření (to znamená např. v korunách). V praxi se ovšem používá kotace v relativním vyjádření a cena – kurz dluhopisu je potom stanoven v procentech z jmenovité hodnoty. Chceme-li určit, jaká je cena dluhopisu v absolutním vyjádření, můžeme tak učinit pomocí vzorce:

$$P = \frac{P_{\%} \cdot JH}{100}, \qquad \textbf{(13-5)}$$

kde P je cena dluhopisu v absolutním vyjádření;
$P_{\%}$ je kurz dluhopisu vyjádřený v % z jmenovité hodnoty;
JH je jmenovitá hodnota dluhopisu.

Vzhledem k tomu, že kuponové platby jsou vypláceny v pravidelných, zpravidla ročních či půlročních termínech, je zřejmé, že čím je výplata kuponu blíže, tím je daný dluhopis (za ostatních neměnných okolností) hodnotnější. Na to musí samozřejmě reagovat i cena dluhopisu.

V praxi by však bylo nepřehledné, aby se kurz dluhopisu denně měnil vlivem zkracující se doby do výplaty kuponu. Proto se kurz dluhopisů kotuje bez vlivu následující kuponové úrokové platby, ta se potom zohledňuje v tzv. alikvotním úrokovém výnosu. Cena dluhopisu, kterou platí kupující prodávajícímu, se potom skládá z ceny odpovídající kotovanému kurzu a alikvotního úrokového výnosu.

Alikvotní úrokový výnos je, zjednodušeně řečeno, část kuponového výnosu odpovídající době od výplaty posledního kuponu do dne, ke kterému jej počítáme (vypořádání obchodu). Výši alikvotního úrokového výnosu vyjádřenou v % můžeme vypočítat (při standardu, že rok = 360 dnů) podle vzorce:

$$AUV_{\%} = \frac{p_k \cdot t_v}{360}, \qquad \textbf{(13-6)}$$

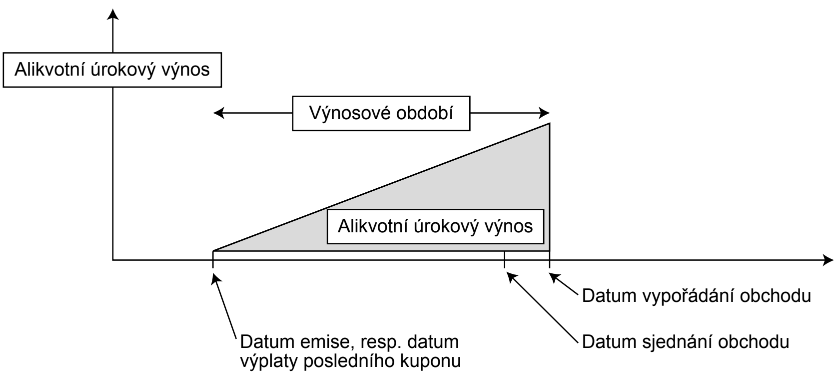
kde $AUV_{\%}$ je alikvotní úrokový výnos vyjádřený v %;
p_k je úroková (kuponová) sazba dluhopisu v % p.a.;
t_v je délka výnosového období (tj. od výplaty posledního kuponu do data vypořádání obchodu) ve dnech.

Absolutní výši (např. v korunách) alikvotního úrokového výnosu potom můžeme vypočítat podle vzorce:

$$AUV_{ABS} = \frac{AUV_{\%} \cdot JH}{100} = \frac{p_k \cdot t_v \cdot JH}{360 \cdot 100}, \qquad \textbf{(13-7)}$$

kde AUV_{ABS} je alikvotní úrokový výnos v absolutním (korunovém) vyjádření;
JH je jmenovitá hodnota dluhopisu;
$AUV_{\%}$ je alikvotní úrokový výnos vyjádřený v %;
p_k je kuponová (úroková) sazba dluhopisu v % p.a.;
t_v je délka výnosového období ve dnech.

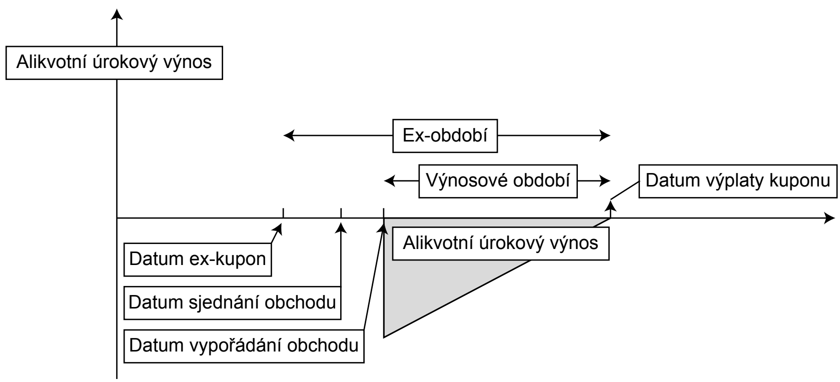
Pro výpočet alikvotního úrokového výnosu musíme mít jednoznačně stanovenou dobu, označovanou jako **výnosové období,** za kterou ho počítáme. Počátečním dnem výnosového období je datum výplaty posledního kuponu, eventuálně datum emise dluhopisu (pro ty případy, kdy dosud nebyl z dluhopisu vyplacen žádný kupon). Konečným datem je potom datum vypořádání obchodu, nikoliv tedy datum jeho sjednání. Schematicky jsou toto období a průběh odpovídajícího alikvotního úrokového výnosu znázorněny na obr. 13.1.



Obrázek 13.1 Výnosové období a alikvotní úrokový výnos

Zvláštní případ z hlediska stanovení alikvotního úrokového výnosu může nastat v tom případě, že dluhopis má stanoveno tzv. **datum ex-kupon.** Je to první den období, ve kterém subjekt kupující dluhopis již nezískává se zakoupením dluhopisu nárok na výplatu nejbližšího úrokového kuponu; neboli pro to, kdo získá nárok na kuponovou platbu, je rozhodující, kdo je vlastníkem dluhopisu ke dni předcházejícímu datu ex-kupon.[43] Období mezi datem ex-kupon (včetně tohoto data) a dnem předcházejícím den výplaty kuponu (opět včetně tohoto data) se označuje jako **ex-období.** Platí tedy, že koupě dluhopisu v tomto období nezakládá nárok na výplatu nejbližšího úrokového kuponu.

Připadne-li konečné datum výnosového období (tj. vypořádání obchodu) do ex-období, potom se za počátek výnosového období bere datum výplaty kuponu, vztahující se k danému ex-období. Jelikož v tomto případě konečné datum výnosového období předchází jeho počátek, je výnosové období záporné. Záporný je potom i alikvotní úrokový výnos. Tato situace je znázorněna na obr. 13.2.



Obrázek 13.2 Záporné výnosové období

Logika záporného alikvotního úrokového výnosu vyplývá z toho, že kupující nabývá dluhopis před výplatou kuponu, ale nemá na něj již nárok. Za dobu do výplaty kuponu by tak de facto utrpěl úrokovou ztrátu, která je mu právě kompenzována záporným alikvotním úrokovým výnosem, který snižuje cenu dluhopisu placenou prodávající straně.

43 Pokud není datum ex-kupon explicitně stanoven, je jím den výplaty kuponu.

13.2 Výnos z dluhopisů a jeho měření

Z dluhopisu mohou jeho majiteli plynout výnosy v zásadě ve dvou základních formách:

- jako **kuponový (úrokový) výnos**;
- jako **rozdíl mezi cenou, za kterou dluhopis koupil, a cenou, za kterou dluhopis opětně prodal**, resp. jmenovitou hodnotou, která je splacena v době splatnosti dluhopisu.

K měření výnosnosti investice do dluhopisů můžeme využít různé ukazatele, které se liší především svojí přesností, na druhé straně však i náročností na výpočet.

Jednoduchým ukazatelem je **kuponová výnosnost,** která vyjadřuje vztah mezi kuponovou úrokovou platbou a jmenovitou hodnotou:

$$r_K = \frac{C}{JH} \cdot 100, \qquad \textbf{(13-8)}$$

kde r_K je kuponová výnosnost v %;
C je kuponová úroková platba;
JH je jmenovitá hodnota dluhopisu.

Kuponová výnosnost není nic jiného než kuponová (úroková) sazba dluhopisu. Jako míra výnosnosti má řadu nedostatků, protože nezohledňuje kupní ani prodejní cenu dluhopisu, ani časové rozložení výnosů plynoucích z dluhopisu.

Přesnější mírou je proto **běžná výnosnost,** která vyjadřuje vztah kuponové (úrokové) platby k aktuální tržní ceně dluhopisu, tj. ceně, za kterou můžeme dluhopis na trhu koupit, tedy:

$$r_B = \frac{C}{P} \cdot 100, \qquad \textbf{(13-9)}$$

kde r_B je kuponová výnosnost v %,
C je kuponová úroková platba,
P je tržní cena dluhopisu.

I tomuto ukazateli však některé nedostatky zůstávají. Proto za nejpřesnější míru výnosnosti investice do dluhopisu lze považovat **výnosnost**

do doby splatnosti. Můžeme ji charakterizovat jako roční výnosnost, které dosáhne investor kupující dluhopis, od jeho zakoupení do jeho splatnosti. Jde vlastně o úrokovou sazbu, která navzájem vyrovnává aktuální tržní cenu dluhopisu se současnou hodnotou budoucích výnosů (včetně splacené jistiny), plynoucích z daného dluhopisu. Pokud tedy do vztahu (13-1), který určuje teoretickou cenu dluhopisu jako současnou hodnotu budoucích plateb z dluhopisu, dosadíme na levou stranu aktuální tržní cenu dluhopisu, to znamená:

$$P_{TR} = \frac{C}{1+r_{DS}} + \frac{C}{(1+r_{DS})^2} + \frac{C}{(1+r_{DS})^3} + \ldots + \frac{C}{(1+r_{DS})^n} + \frac{JH}{(1+r_{DS})^n}, \qquad \textbf{(13-10)}$$

kde P_{TR} je tržní cena dluhopisu;
C je roční kuponová úroková platba;
JH je jmenovitá hodnota dluhopisu;
r_{DS} je výnosnost do doby splatnosti, vyjádřená jako desetinné číslo;
n je doba do splatnosti dluhopisu v letech;

potom bude výnosová (úroková) sazba r_{DS} vyhovující dané rovnici výnosností do doby splatnosti.

Vzorec pro výpočet výnosnosti do doby splatnosti můžeme použít i pro výpočet **výnosnosti za dobu držby** dluhopisu, která je kratší než doba splatnosti, neboli pro případ, kdy dluhopis prodáme ještě před splatností. Pro výnosnost za dobu držby dluhopisu potom platí:

$$P_0 = \frac{C}{1+r_{DD}} + \frac{C}{(1+r_{DD})^2} + \frac{C}{(1+r_{DD})^3} + \ldots + \frac{C}{(1+r_{DD})^j} + \frac{P_k}{(1+r_{DD})^k}, \qquad \textbf{(13-11)}$$

kde P_0 je aktuální tržní cena dluhopisu (kupní cena);
C je roční kuponová úroková platba;
P_k je tržní cena dluhopisu v čase k (prodejní cena);
r_{DD} je výnosnost za dobu držby, vyjádřená jako desetinné číslo;
j je doba do poslední výplaty kuponu během držby dluhopisu v letech;
k je doba držby dluhopisu v letech.

Pro již zmíněné zvláštní formy dluhopisů je výpočet výnosnosti do doby splatnosti jednodušší. Pro **dluhopis s nulovým kuponem** můžeme vyjádřit výnosnost do doby splatnosti osamostatněním úrokové míry ze vzorce (13-3):

$$r_{NK} = \sqrt[n]{\frac{JH}{P_{TNK}}} - 1, \tag{13-12}$$

kde r_{NK} je výnosnost do doby splatnosti jako desetinné číslo;
P_{TNK} je tržní cena dluhopisu s nulovým kuponem;
JH je jmenovitá hodnota dluhopisu;
n je doba do splatnosti dluhopisu v letech.

Pro **dluhopis bez splatnosti** (věčnou rentu) můžeme na základě vzorce (13-4) vyjádřit výnosnost do doby splatnosti jako:

$$r_{BS} = \frac{C}{P_{TBS}}, \tag{13-13}$$

kde r_{BS} je výnosnost do doby splatnosti dluhopisu bez splatnosti;
C je roční kuponová úroková platba;
P_{TBS} je aktuální tržní cena dluhopisu bez splatnosti.

Kromě dvou výše uvedených speciálních případů není výpočet výnosnosti do doby splatnosti jednoduchou záležitostí. Proto se někdy setkáme s jinými ukazateli výnosnosti, které jsou určitým zjednodušením výnosnosti do doby splatnosti a jejichž výpočet je mnohem jednodušší. Příkladem takového ukazatele může být následující vzorec (někdy označovaný jako **rendita**):

$$r_R = \frac{C}{P_0} + \frac{P_k - P_0}{k \cdot P_0}, \tag{13-14}$$

kde r_R je výnosnost za dobu držby – rendita, vyjádřená jako desetinné číslo;
P_0 je aktuální tržní cena dluhopisu (kupní cena);
C je roční kuponová úroková platba;
P_k je tržní cena dluhopisu v čase k (prodejní cena);
k je doba držby dluhopisu v letech.

Příklad 13-3 *Výnosnost za dobu držby*

Zakoupili jste dluhopis s pevnou kuponovou platbou, kuponová sazba činí 5 % p.a., jmenovitá hodnota 1 000 Kč a kupní cena 950 Kč. Po jednom roce tento dluhopis prodáte za cenu 1 050 Kč. Jaká byla výnosnost vaší investice (od daně z úroků abstrahujte)?

Řešení

Výnosnost můžeme vypočítat podle vzorce (13-14):

$$r_R = \frac{C}{P_0} + \frac{P_k - P_0}{k \cdot P_0} = \frac{50}{950} + \frac{1050 - 950}{1 \cdot 950} = 0{,}1579.$$

Výnosnost naší investice činila 15,79 % p.a.

13.2.1 Zdanění výnosů z dluhopisů

Doposud jsme se zabývali měřením hrubé výnosnosti, neboli neuvažovali jsme vliv zdanění na výnosnost. Vzhledem k tomu, že investora ve svých důsledcích zajímá čistá výnosnost a výnosy z dluhopisů podléhají zdanění, podíváme se, jak se zdanění výnosů promítne do vzorců pro výpočet výnosnosti.

Podle platného zákona o dani z příjmu podléhají u nás výnosy plynoucí z dluhopisů následujícímu zdanění:

- **kuponové (úrokové) výnosy** nebo výnosy plynoucí z rozdílu mezi jmenovitou hodnotou vyplácenou v době splatnosti a emisní cenou při jejich vydání jsou daněny takto:
  - pro **fyzické osoby** se na tyto výnosy vztahuje srážková daň se zvláštní sazbou daně ve výši 15 %[44]; daň sráží a odvádí přímo emitent při výplatě úroků a tyto příjmy potom nejsou součástí příjmů, vcházejících do daňového přiznání;
  - **fyzickým osobám – podnikatelům, pokud je vklad zahrnut v jejich obchodním majetku,** a **právnickým osobám** vcházejí příjmy z úrokových výnosů do daňového základu;

[44] Od roku 2015 se tato sazba zvyšuje na 19 %.

- **kapitálové výnosy** plynoucí z rozdílu mezi prodejní a kupní cenou dluhopisu patří mezi ostatní příjmy a vcházejí do celkového daňového základu investora s výjimkou případu, kdy doba od zakoupení do prodeje přesáhne dobu 6 měsíců[45], potom jsou pro fyzické osoby od daně osvobozeny.

Vliv zdanění lze promítnout do uvedených vzorců relativně jednoduchým způsobem pro fyzické osoby, u právnických osob závisí již čistá výnosnost na celkové výši daňového základu, a proto nelze vliv zdanění do uvedených vztahů přímo promítnout.

Pro fyzické osoby se zdanění ve vzorcích pro výpočet výnosnosti projeví tak, že od kuponové platby musíme odečíst 15% daň, analogicky u dluhopisu s nulovým kuponem se 15% daň odečte od rozdílu mezi emisní cenou a jmenovitou hodnotou dluhopisu.

Základní rovnice pro určení **čisté výnosnosti do doby splatnosti** má potom tvar:

$$P_{TR} = \frac{C\cdot(1-0{,}15)}{1+{}_{č}r_{DS}} + \frac{C\cdot(1-0{,}15)}{(1+{}_{č}r_{DS})^2} + \frac{C\cdot(1-0{,}15)}{(1+{}_{č}r_{DS})^3} + \ldots + \frac{C\cdot(1-0{,}15)}{(1+{}_{č}r_{DS})^n} + \frac{JH}{(1+{}_{č}r_{DS})^n}, \qquad \textbf{(13-15)}$$

kde P_{TR} je tržní cena dluhopisu;
$C\cdot(1-0{,}15)$ je čistá roční kuponová úroková platba;
JH je jmenovitá hodnota dluhopisu;
${}_{č}r_{DS}$ je čistá výnosnost do doby splatnosti, vyjádřená jako desetinné číslo;
n je doba do splatnosti dluhopisu v letech.

Vzorec pro výpočet čisté výnosnosti do doby splatnosti pro **dluhopis s nulovým kuponem** se změní na následující tvar:

$${}_{č}r_{NK} = \sqrt[n]{\frac{JH-(JH-P_{TNK})\cdot 0{,}15}{P_{TNK}}} - 1, \qquad \textbf{(13-16)}$$

[45] Od roku 2015 se tato doba prodlužuje na 3 roky.

kde $_{č}r_{NK}$ je čistá výnosnost do doby splatnosti, vyjádřená jako desetinné číslo;
P_{TNK} je tržní cena dluhopisu s nulovým kuponem;
JH je jmenovitá hodnota dluhopisu;
n je doba do splatnosti dluhopisu v letech.

Čistou výnosnost za dobu držby (renditu) dostaneme zohledněním zdanění do vzorce (13-14). Výsledný tvar vzorce je potom:

$$_{č}r_R = \frac{C \cdot (1-0{,}15)}{P_0} + \frac{(P_k - P_0) \cdot (1-d)}{k \cdot P_0}, \tag{13-17}$$

kde $_{č}r_R$ je čistá výnosnost za dobu držby, vyjádřená jako desetinné číslo;
P_0 je tržní cena dluhopisu, za kterou byl zakoupen;
C je roční kuponová úroková platba;
P_k je tržní cena dluhopisu v čase k (prodejní cena);
k je doba držby dluhopisu v letech;
d je sazba daně z příjmů (pro $k \leq 0{,}5$ roku), resp. 0 (pro $k > 0{,}5$ roku).

Příklad 13-4 *Čistá výnosnost za dobu držby*

Jaká bude čistá výnosnost investice z příkladu 13-3, pokud úroky budou podléhat 15% dani z příjmu?

Řešení

Při výpočtu vyjdeme ze vzorce (13-17), to znamená, že kuponovou úrokovou platbu snížíme o daň:

$$_{č}r_R = \frac{C \cdot (1-0{,}15)}{P_0} + \frac{(P_k - P_0) \cdot (1-d)}{k \cdot P_0} =$$

$$= \frac{50 \cdot (1-0{,}15)}{950} + \frac{(1\,050-950) \cdot (1-0)}{1 \cdot 950} = 0{,}15.$$

Čistý výnos za dobu držby daného dluhopisu činil 15 % p.a.

13.3 Výnosové křivky

Doposud jsme při výpočtu teoretické ceny (současné hodnoty budoucích výnosů) dluhopisů diskontovali všechny kuponové platby stejnou úrokovou sazbou bez ohledu na to, v kterém období jsou vypláceny, tedy bez ohledu na dobu splatnosti. V praxi se však úrokové sazby pro různé doby splatnosti liší. Tedy dluhopisy s různou dobou splatnosti mají ve skutečnosti i různé výnosnosti.

Vyjádříme-li závislost výnosnosti dluhopisu na době jeho splatnosti dostaneme **časovou strukturu úrokových sazeb** (měr). Tato závislost je významná jak pro investory, tak pro emitenty dluhopisů.

Investor se musí rozhodnout, zda investovat do krátkodobých či dlouhodobých dluhopisů. U krátkodobých dluhopisů mu vznikne při poklesu tržních úrokových sazeb problém při reinvestování v době splatnosti dluhopisu, naopak u dlouhodobých dluhopisů při vzestupu tržních úrokových sazeb nese riziko spojené se snížením ceny v případě prodeje před dobou splatnosti.

Pro emitenta zde vzniká otázka, zda emitovat krátkodobé dluhopisy – hrozí možnost, že si později bude muset půjčit dráž, nebo emitovat dlouhodobé dluhopisy, což je nebezpečné, fixuje-li vysoké kupónové (úrokové) sazby.

Ukazuje se, že většinou platí, že čím delší je doba splatnosti dluhopisu, tím větší je jeho výnosnost, ale také volatilita ceny dluhopisu.

Graficky se vztah mezi výnosností a dobou splatnosti znázorňuje výnosovou křivkou, a to pro dluhopisy mající podobné charakteristiky (riziko, likvidita, zdanění).

V praxi se setkáváme s různými strukturami úrokových sazeb, a tedy s různými tvary výnosových křivek.

Při **stoupající** struktuře úrokových sazeb je nižší výnosnost pro dluhopisy s kratší dobou splatnosti, nežli pro dluhopisy s delší dobou splatnosti. Tento případ je v praxi nejobvyklejší. Výnosové křivky jsou podle empirických výzkumů převážně rostoucí a konkávní.

Při **klesající** struktuře úrokových sazeb je tomu naopak. Dluhopisy s kratší dobou splatnosti mají vyšší výnosnost, než dluhopisy s delší dobou splatnosti. S klesající strukturou úrokových sazeb jsme se setkali i u nás v polovině 90. let minulého století. To vyplývalo z očekávaného uvolnění monetární politiky centrální banky a snížení úrokových sazeb.

Plochá struktura úrokových sazeb znamená, že výnosnost dluhopisů je shodná pro všechny splatnosti. Z ploché struktury úrokových sazeb jsme dosud vycházeli při diskontování budoucích výnosů z dluhopisů, které jsme prováděli pomocí stejné úrokové míry.

13.3.1 Vztah mezi spotovou a forwardovou úrokovou sazbou

Struktura úrokových sazeb může být tvořena různými typy úrokových sazeb, např. spotovými nebo forwardovými úrokovými mírami .

Spotová (promptní) úroková sazba je úroková sazba pro spotové obchody, to znamená obchody, které jsou realizovány takřka bezprostředně (do několika dnů) po jejich sjednání. Je-li tedy sjednána úroková sazba na určitou dobu, platí od současnosti do doby splatnosti sjednané operace.

Forwardová (termínová) úroková sazba je úroková sazba, která bude platná na sjednanou dobu od daného budoucího okamžiku, je sjednána pro budoucí transakci (forwardový kontrakt).

Vztah mezi spotovými a forwardovými úrokovými sazbami vychází z úvahy, že investor dosáhne stejného výnosu, investuje-li spotově 1 Kč na $n+k$ let nebo investuje-li spotově 1 Kč na n let a pak forvardem na k let. Matematicky můžeme vztah mezi spotovými a forwardovými úrokovými měrami vyjádřit vztahem:

$$(1+i_n)^n (1+f_{n,k})^k = (1+i_{n+k})^{n+k}, \qquad \textbf{(13-18)}$$

kde i_n je spotová úroková sazba na dobu n let;
$f_{n,k}$ je forwardová úroková sazba, která bude platit na období za n let na k let.

Mějme dánu spotovou výnosovou křivku $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ pro n období od počátku prvního do konce n-tého období, kde úrokové sazby jsou v ročním vyjádření (p.a.).

Z této výnosové křivky lze spočítat forwardové úrokové sazby.

$$(1+i_1)\cdot(1+f_{1,1})\cdot(1+f_{2,1})\cdot\ldots\cdot(1+f_{n-1,1})=(1+i_n)^n,$$

$$(1+i_2)^2\cdot(1+f_{2,1})\cdot\ldots\cdot(1+f_{n-1,1})=(1+i_n)^n,$$

$$(1+i_{n-1})^{n-1}\cdot(1+f_{n-1,1})=(1+i_n)^n.$$

Z výše uvedené soustavy rovnic lze postupně získat všechny forwardové úrokové sazby:

$$f_{n-1,1}=\frac{(1+i_n)^n}{(1+i_{n-1})^{n-1}}-1,$$

$$f_{n-2,1}=\frac{(1+i_n)^n}{(1+i_{n-2})^{n-2}}\cdot(1+f_{n-1,1})-1,$$

kde i_n je spotová úroková sazba na dobu n let;
$f_{n,k}$ je forwardová úroková sazba, která se vztahuje na období za n let na k let;
$f_{0,1}$ forwardová sazba pro současný (první) rok je rovna spotové úrokové sazbě pro první rok neboli $i_1=f_{0,1}$.

Je-li výnosová křivka spotových úrokových sazeb rostoucí, pak roční forwardová sazba pro zvolené období n je větší než výnosnost do doby splatnosti pro n období

Pro klesající výnosovou křivku spotových úrokových sazeb budou forwardové sazby menší než příslušné spotové úrokové sazby (výnosnosti do doby splatnosti).

Je-li výnosová křivka plochá neboli spotové úrokové sazby jsou konstantní, pak pochopitelně jsou konstantní i forwardové sazby a jsou rovny spotovým sazbám.

Ukažme si, jak lze vypočítat spotové úrokové sazby na základě dluhopisů s nulovým kuponem (diskontovaných dluhopisů), které jsou obchodovány na trhu a mají podobné charakteristiky (likvidita, riziko).

Příklad 13-5 *Struktura úrokových sazeb z dluhopisů s nulovým kuponem*

Mějme k dispozici údaje o pěti diskontovaných dluhopisech s jmenovitou hodnotou 100 Kč:

	A	B	C	D	E
doba do splatnosti	1	2	3	4	5
cena na trhu	93	85	77	68	59

1) Vytvořte časovou strukturu úrokových sazeb.
2) Pomocí zjištěné struktury úrokových sazeb vypočítejte teoretickou cenu dluhopisu s jmenovitou hodnotou 100 Kč, ze kterého se vyplácí roční kupón ve výši 8 % z jmenovité hodnoty (první kupón bude vyplacen za jeden rok) a do jehož splatnosti zbývají 4 roky.

Řešení

1) Časová struktura úrokových sazeb:

V případě dluhopisů s nulovým kuponem bude časová struktura úrokových sazeb tvořena výnosnostmi do doby splatnosti jednotlivých dluhopisů. Označme si i_n výnosnost do doby splatnosti dluhopisu, do jehož splatnosti zbývá n let.

Pro výpočet výnosnosti do doby splatnosti jednotlivých dluhopisů použijeme vztah (13-12)

$$i_n = \sqrt[n]{\frac{JH}{P}} - 1.$$

Z údajů pro dluhopis A vypočítáme výnosnost do doby splatnosti (spotovou úrokovou sazbu) pro roční dobu splatnosti:

$$i_1 = \frac{100}{93} - 1 = 7{,}53\ \%.$$

Analogicky z údajů pro dluhopis B zjistíme spotovou úrokovou sazbu pro splatnost 2 roky:

$$i_2 = \sqrt{\frac{100}{85}} - 1 = 8{,}47\ \%.$$

Dále postupujeme stejným způsobem, využíváme vztah (13-12) pro ostatní dluhopisy a tím získáme spotové úrokové sazby pro odpovídající splatnosti v konstruované časové struktuře úrokových sazeb.

Dluhopis C:

$$i_3 = \sqrt[3]{\frac{100}{77}} - 1 = 9{,}10\ \%.$$

Dluhopis D:

$$i_4 = \sqrt[4]{\frac{100}{68}} - 1 = 10{,}12\ \%.$$

Dluhopis E:

$$i_5 = \sqrt[5]{\frac{100}{59}} - 1 = 11{,}13\ \%.$$

Vypočtené hodnoty spotových úrokových sazeb (výnosností do doby splatnosti) představují časovou strukturu úrokových sazeb. Výnosová křivka jako grafické znázornění zjištěné struktury úrokových sazeb je v tomto případě rostoucí.

2) Ohodnocení dluhopisu:

Při výpočtu teoretické ceny dluhopisu na základě zkonstruované časové struktury musíme jednotlivé budoucí platby plynoucí z dluhopisu (kuponové platby a splátku jmenovité hodnoty) diskontovat rozdílnými úrokovými sazbami. Vyjdeme z výrazu (13-1):

$$P = \frac{C}{1+i} + \frac{C}{(1+i)^2} + \frac{C}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{C}{(1+i)^n} + \frac{JH}{(1+i)^n},$$

kde místo ploché výnosové křivky (shodných úrokových sazeb) použijeme právě zjištěnou spotovou výnosovou křivku. Z dluhopisu plyne majiteli první 3 roky kupón ve výši *C* a čtvrtý rok kupon *C* a jmenovitá hodnota *JH*. Jeho teoretickou cenu pak vypočítáme pomocí vztahu:

$$P = \frac{C}{1+i_1} + \frac{C}{\left(1+i_2\right)^2} + \frac{C}{\left(1+i_3\right)^3} + \frac{C+JH}{\left(1+i_4\right)^4}.$$

Nyní dosadíme za $i_1, \ldots, i_4$ dříve spočtené spotové úrokové sazby:

$$P = \frac{8}{1+0{,}0752} + \frac{8}{(1+0{,}0846)^2} + \frac{8}{(1+0{,}09103)^3} + \frac{8+100}{(1+0{,}1012)^4} = 93{,}84.$$

Teoretická cena dluhopisu je 93,84 Kč.

V předcházejícím výkladu jsme pro konstrukci spotové výnosové křivky vycházeli ze znalosti cen diskontovaných dluhopisů s různými dobami splatnosti. Podívejme se nyní na to, jak zkonstruovat spotovou výnosovou křivku, známe-li ceny dluhopisů s kuponovým listem a jejich kuponové (úrokové) sazby, které v žádném případě nelze chápat jako spotové úrokové sazby.

V tomto případě není spotová struktura úrokových měr tvořena jednotlivými výnosnostmi do doby splatnosti, jak jsme to viděli u diskontovaných dluhopisů. Pro výpočet jednotlivých spotových sazeb vycházíme ze stejné úvahy, tedy, že cena dluhopisu je rovna současné hodnotě budoucích výnosů. Avšak pro diskontování výnosů, které nám dluhopis přináší v jednotlivých letech, používáme příslušné úrokové sazby. Spotové úrokové míry je tady nutno počítat postupně.

Slovně charakterizovaný postup si ukažme na následujícím příkladu.

Příklad 13-6 *Spotová struktura úrokových měr pomocí kuponových dluhopisů*

Máme k dispozici údaje o pěti kuponových dluhopisech s jmenovitou hodnotou 100 Kč:

	A	B	C	D	E
doba do splatnosti	1	2	3	4	5
kuponová sazba	8 %	9 %	9 %	10 %	13 %
cena na trhu	101	102	100	98	103

1) Zkonstruujte časovou strukturu spotových úrokových sazeb.
2) Pomocí zjištěné struktury úrokových sazeb ohodnoťte dluhopis s jmenovitou hodnotou 100 Kč, který vyplácí roční kupon ve výši 8 % z jmenovité hodnoty (první kupon bude vyplacen za jeden rok) a do jehož splatnosti zbývají 4 roky.

Řešení

1) Časová struktura úrokových sazeb

V tomto případě nemůžeme úrokové sazby $i_1, \ldots, i_5$ spočítat nezávisle na sobě, ale musíme postupovat od i_1 k i_5, přičemž v následujícím výpočtu vždy využijeme již spočtené úrokové sazby.

Z údajů o dluhopisu A vypočítáme jednoletou úrokovou sazbu i_1 na základě rovnosti ceny a současné hodnoty budoucích výnosů. Dluhopis A je splatný za rok, kdy bude vyplacena poslední kuponová platba a splátka jmenovité hodnoty. Tyto platby budeme diskontovat hledanou jednoletou spotovou úrokovou sazbou (výnosností do doby splatnosti) i_1.

$$P = \frac{C + JH}{1 + i_1}.$$

Dosazením získáme

$$101 = \frac{8 + 100}{1 + i_1},$$

a tedy

$$i_1 = 6{,}93\ \%.$$

Z údajů pro dvouletý dluhopis B vypočítáme roční spotovou úrokovou sazbu pro dobu splatnosti dva roky i_2. Dluhopis B přinese dvě platby, první za rok ve formě kuponové platby a druhý za dva roky, a to kuponovou platbu a splátku jmenovité hodnoty.

Opět vyjdeme z úvahy, že cena dluhopisu je rovna současné hodnotě budoucích plateb. První kuponová platba bude vyplacena za rok a její současnou hodnotu budeme tentokrát počítat diskontováním pomocí již vypočítané spotové úrokové sazby i_1. Druhou platbu (součet kuponové platby a jmenovité hodnoty) budeme diskontovat hledanou spotovou úrokovou sazbou i_2.

$$P = \frac{C}{1 + i_1} + \frac{C + JH}{(1 + i_2)^2}.$$

$$102 = \frac{9}{1+0,0693} + \frac{9+100}{(1+i_2)^2}, \text{ z čehož}$$

$$i_2 = 7,923\ \%.$$

Analogicky budeme postupovat při výpočtu spotové úrokové sazby i_3. Vyjdeme z toho, že dluhopis C je tříletý, přinese tři budoucí platby, z nichž první (kuponová platba) se musí diskontovat spotovou úrokovou sazbou i_1, protože je splatná za rok, druhá (též kuponová platba) se musí diskontovat též již vypočtenou spotovou úrokovou sazbou i_2, protože je splatná za dva roky, a třetí platba (součet kuponové platby a jmenovité hodnoty) budeme diskontovat hledanou spotovou úrokovou sazbou i_3.

$$P = \frac{C}{1+i_1} + \frac{C}{(1+i_2)^2} + \frac{C+JH}{(1+i_3)^3}.$$

$$100 = \frac{9}{1+0,0693} + \frac{9}{(1+0,07923)^2} + \frac{9+100}{(1+i_3)^3} \Rightarrow i_3 = 9,135\ \%.$$

Dluhopis D:

$$P = \frac{C}{1+i_1} + \frac{C}{(1+i_2)^2} + \frac{C}{(1+i_3)^3} + \frac{C+JH}{(1+i_4)^4}.$$

$$98 = \frac{10}{1+0,0693} + \frac{10}{(1+0,07923)^2} + \frac{10}{(1+0,09135)^3} + \frac{10+100}{(1+i_4)^4} \Rightarrow i_4 = 11,03\ \%.$$

Dluhopis E:

$$P = \frac{C}{1+i_1} + \frac{C}{(1+i_2)^2} + \frac{C}{(1+i_3)^3} + \frac{C}{(1+i_4)^4} + \frac{C+JH}{(1+i_5)^5}.$$

$$103 = \frac{13}{1+0,0693} + \frac{13}{(1+0,07923)^2} + \frac{13}{(1+0,09135)^3} + \frac{13}{(1+0,1103)^4} + \frac{13+100}{(1+i_5)^5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_5 = 13,076\ \%.$$

Vypočtené hodnoty spotových úrokových sazeb představují časovou strukturu úrokových sazeb. Výnosová křivka jako grafické znázornění zjištěné struktury úrokových sazeb je i v tomto případě rostoucí.

2) Ohodnocení dluhopisu

Pomocí výše získané struktury úrokových měr teď oceníme čtyřletý dluhopis:

$$P = \frac{C}{1+i_1} + \frac{C}{(1+i_2)^2} + \frac{C}{(1+i_3)^3} + \frac{C+JH}{(1+i_4)^4}.$$

$$P = \frac{8}{1+0{,}0693} + \frac{8}{(1+0{,}07923)^2} + \frac{8}{(1+0{,}09135)^3} + \frac{8+100}{(1+0{,}1103)^4} = 91{,}56.$$

Teoretická cena dluhopisu je 91,56 Kč. Cena je odlišná od minulého příkladu, protože jsme ocenili dluhopis podle jiné výnosové křivky.

14. Durace, konvexita, imunizace

Finanční i nefinanční firmy drží ve své bilanci úrokově citlivá aktiva a závazky. Jedním z hlavních cílů řízení úrokového rizika je proto zajistit, aby tyto položky byly v rovnováze. Nestačí pouze zajistit rovnost jejich současných hodnot, ale je rovněž nutné, aby se hodnoty aktiv a závazků rovnaly i při změně tržní úrokové míry. To je velmi složitý úkol, který je v obecné rovině těžko řešitelný. Při malých změnách tržní úrokové míry je možno použít pro vyjádření závislosti změny ceny na změně tržní úrokové míry **durace** (duration), která vychází z první derivace ceny podle úrokové míry. Pokud chceme získat přesnější aproximaci, musíme přidat další člen nazývaný **konvexita**. Konvexita vyjadřuje míru zakřivení cenové funkce a vychází z druhé derivace. Investor spravující úrokově citlivé portfolio se pak snaží, aby durace (popř. konvexita) aktiv se rovnala duraci (konvexitě) závazků. Tento proces se nazývá imunizace a patří mezi základní strategie řízení úrokových rizik.

14.1 Durace pevně úročeného dluhopisu

Jak jsme již uvedli, důležitou charakteristikou dluhopisu je jeho doba splatnosti. Doba splatnosti ovšem není zcela přesnou mírou toho, kdy se nám peníze investované do dluhopisu vrátí zpět. Na první pohled je to vidět na srovnání dvou dluhopisů, z nichž jeden má vysokou kuponovou míru, druhý je dluhopis s nulovým kuponem, přičemž oba mají shodnou dobu splatnosti. Je zřejmé, že z dluhopisu s kuponovými úrokovými platbami se nám vrací investovaný kapitál již v průběhu splatnosti, tedy dříve než u dluhopisu s nulovým kuponem.

Nejznámějším typem durace je durace Maculayova (dále jen durace), kterou můžeme označit jako střední dobu splatnosti dluhopisu, v sobě výše uvedené faktory zohledňuje. Zjednodušeně řečeno, durace vyjadřuje dobu, za kterou se nám náš investovaný kapitál (při zohlednění časové hodnoty peněz) vrátí zpět. Matematicky je durace vyjádřena jako vážený aritmetický průměr jednotlivých dob, ve kterých plyne z dluhopisu určitá platba, přičemž vahami jsou současné hodnoty těchto plateb, to znamená:

$$Dur = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{j \cdot CF_j}{(1+i)^j}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{CF_j}{(1+i)^j}}, \tag{14-1}$$

kde Dur je durace;
CF_j je platba (cash flow), plynoucí v čase j z dluhopisu (tj. zejména kuponové úrokové platby a jmenovitá hodnota v době splatnosti);
i je tržní úroková sazba;
j jsou jednotlivé roky, ve kterých dochází k platbám z dluhopisu;
n je doba splatnosti dluhopisu.

Z podstaty durace a z logiky vzorce vyplývá, že durace je (za jinak neměnných okolností) tím nižší, čím:

- vyšší jsou platby (cash flow), plynoucí z dluhopisu během doby do jeho splatnosti;
- dříve cash flow z daného instrumentu nastává;
- kratší je celková doba do splatnosti.

Durace má ovšem ještě jednu zajímavou vlastnost: vyjadřuje **míru citlivosti tržní ceny daného dluhopisu na změnu tržní úrokové sazby.** Durace totiž vyjadřuje závislost relativní změny ceny instrumentu na relativní změně tržní úrokové sazby, protože platí:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -Dur \cdot \frac{\Delta i}{1+i}, \tag{14-2}$$

kde Dur je durace;
P je cena dluhopisu;
i je tržní úroková sazba;
ΔP, Δi je změna ceny dluhopisu, resp. tržní úrokové sazby.

Ze vztahu (14-2) a z podstaty durace potom pro změny v tržní ceně dluhopisu vyplývá, že čím má daný dluhopis nižší hodnotu durace, tím menší jsou změny v jeho tržní ceně vzhledem ke změnám tržních úrokových sazeb. Je to z toho důvodu, že se snižující se durací dluhopisu se dříve vrací kapitál investovaný do dluhopisu a roste tak možnost reinvestování průběžných plateb, plynoucích z dluhopisu. Změny v tržních úrokových sazbách se potom promítají do změny ceny dluhopisu v menší míře, protože jsou více zohledněny ve výnosech, plynoucích z reinvestování průběžných kuponových plateb.

Příklad 14-1 *Durace*

Vypočítejte duraci dluhopisu s pevnou kuponovou úrokovou sazbou 8 %, jestliže jmenovitá hodnota dluhopisu je 1 000 Kč, doba do splatnosti tři roky, aktuální tržní cena dluhopisu je 950,25 Kč, a tedy výnosnost do doby splatnosti (tržní úroková sazba) činí 10 % (kuponové platby jsou vypláceny jedenkrát ročně, první bude následovat ode dneška za jeden rok).

Řešení

Duraci vypočítáme dosazením do vzorce (14-1):

$$Dur = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{j \cdot CF_j}{(1+i)^j}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{CF_j}{(1+i)^j}} = \frac{\frac{1 \cdot 80}{1+0,1} + \frac{2 \cdot 80}{(1+0,1)^2} + \frac{3 \cdot (1\,000+80)}{(1+0,1)^3}}{\frac{80}{1+0,1} + \frac{80}{(1+0,1)^2} + \frac{(1\,000+80)}{(1+0,1)^3}} =$$

$$= \frac{72,72 + 132,22 + 2\,434,2}{72,72 + 66,11 + 811,4} = 2,79.$$

Durace daného dluhopisu je 2,79.

Pro odpověď na otázku, jak se změní cena tohoto dluhopisu při změně tržních úrokových sazeb o 1 procentní bod, využijeme vztah (14-2), ze kterého pro absolutní změnu ceny dluhopisu dostaneme:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -Dur \cdot \frac{\Delta i}{1+i} = -2,79 \cdot \frac{0,01}{1+0,1} \cdot 950,25 = -23,76.$$

Při zvýšení tržních úrokových sazeb o jeden procentní bod dojde k poklesu ceny daného dluhopisu přibližně o 23,76 Kč, to je o 2,376 procentního bodu (vyjádřeno z jmenovité hodnoty), neboli o 2,5 % vzhledem k tržní ceně dluhopisu.

Jak jsme uvedli, speciálním případem dluhopisu je konzola,[46] jejíž duraci získáme ze vztahu (14-1) tím, že sečteme v čitateli i ve jmenovateli místo konečné řady řadu nekonečnou nebo vypočítáme limitu čitatele i jmenovatele pro $n \to \infty$. Druhou z uvedených možností (limitu) jsme využili též v části 5.3 pro výpočet současné hodnoty věčného důchodu. Pro duraci **konzoly** potom platí

$$Dur_K = \frac{(1+i)}{i}, \tag{14-3}$$

kde i je tržní úroková sazba.

V některých speciálních případech se obchoduje s dvěma částmi dluhopisu odděleně. Jedna část je pouze jmenovitá hodnota dluhopisu, jedná se tedy o dluhopis s nulovým kuponem, jehož durace je rovna době splatnosti, jak vyplývá ze vztahu (14-1). Druhá část je složena z kuponových plateb plynoucích z dluhopisu bez splátky jmenovité hodnoty. V tomto případě se jedná o dočasný důchod a kuponové platby jsou anuity. Z toho vyplývá, že má smysl se zabývat i durací dočasného důchodu složeného z anuitních plateb. Pro **duraci anuity** platí

$$Dur_A = \frac{1+i}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}, \tag{14-4}$$

kde i je tržní úroková sazba,
n počet (ročních) plateb.

14.2 Další typy durace

V předchozí části jsme definovali pojem durace vztahem (14-1), a to pro dluhopisy s fixní roční kuponovou platbou. Nyní tento pojem zobecníme, neboť duraci je možno počítat i pro jiné typy cenných papírů či finančních instrumentů, jejichž cena je citlivá na změny tržní úrokové míry.

---

[46] Konzola je typ věčného důchodu, který je uváděn též pod pojmem perpetuita.

Pokud budeme uvažovat případ, kdy platba z instrumentu je vyplácena vícekrát do roka, můžeme vyjádřit duraci (Macaulayovu) jako

$$Dur = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}i} \cdot \frac{1+\frac{i}{m}}{P}, \qquad \textbf{(14-5)}$$

kde Dur je durace;
i je roční tržní úroková sazba;
m je počet plateb z instrumentu za rok[47],
$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}i}$ je derivace ceny podle úrokové sazby.

Po kratších výpočtech lze na základě vztahu (14-5) ukázat, že durace dluhopisu, který přináší kuponové platby m-krát ročně, je

$$Dur = \frac{1}{m} \cdot \frac{\sum_{t=1}^{N} \left[\frac{t \cdot \frac{C}{m}}{(1+\frac{i}{m})^t} + N \cdot \frac{JH}{(1+\frac{i}{m})^N} \right]}{P}, \qquad \textbf{(14-6)}$$

kde Dur je durace;
C je roční fixní kuponová platba;
JH je jmenovitá hodnota dluhopisu;
i je roční tržní úroková sazba;
t jsou jednotlivá období, ve kterých dochází k platbám z dluhopisu;
m je počet plateb z instrumentu za rok, počet úrokových období za rok;
N počet plateb zbývajících do doby splatnosti dluhopisu, počet úrokových období ($N = m \cdot n$);
n je doba do splatnosti dluhopisu v letech.

Vztah lze, jak jsme uvedli výše, použít i pro jiné instrumenty, které přinášejí pravidelné platby.

Někdy je možné se setkat s tzv. **modifikovanou durací**:

---

[47] Např. pokud z dluhopisu plynou dvě kuponové platby ročně bude m rovno 2.

$$D_M = \frac{Dur}{1+\frac{i}{m}}, \tag{14-7}$$

neboli

$$D_M = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}i} \cdot \frac{1}{P}.$$

Macaulayova durace a modifikovaná durace se pro velké m nebo malé i liší jen málo.

Další variantou je dolarová (korunová) durace, která je dána

$$D_\$ = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}i}. \tag{14-8}$$

Vidíme, že dolarová durace je první derivací ceny dluhopisu podle tržní úrokové míry. Vyjadřuje cenovou (dolarovou , korunovou) změnu dluhopisu v závislosti na změně tržní úrokové míry.

Cenové změny dluhopisu při malé změně tržní úrokové míry lze pomocí durací vyjádřit následovně:

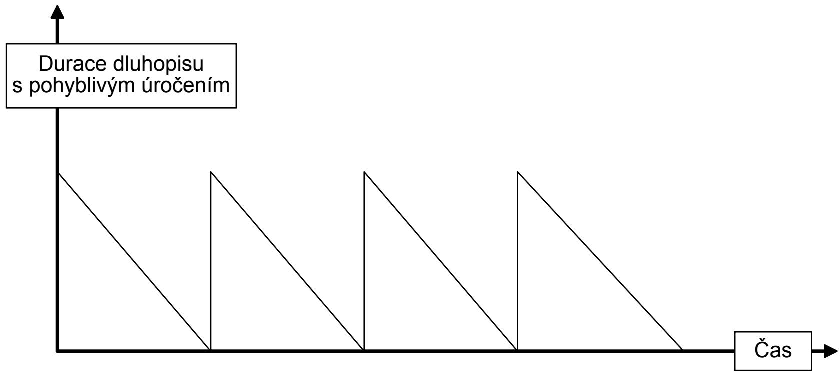
$$\Delta P \cong -D_M \cdot P \cdot \Delta i.$$

$$\Delta P \cong -Dur \cdot \frac{P}{1+i} \cdot \Delta i.$$

$$\Delta P \cong \$D \cdot \Delta i.$$

14.2.1 Durace dluhopisu s pohyblivým úročením

Durace dluhopisu s pohyblivým úročením je nulová v době výplaty kuponu. Je to tím, že pohyblivý kupon bývá většinou určen na základě referenční úrokové sazby (např. LIBOR, PRIBOR), a tak se cena v těchto okamžicích vyrovnává na nominální hodnotu. Mezi platbami to již neplatí. V praxi bývá pohyblivá platba známa jednu periodu předem, takže příští kupon nemůže reagovat na případné změny referenční tržní úrokové sazby. Proto je durace dluhopisu s pohyblivým úročením určena durací příští kuponové platby, kterou můžeme chápat jako zero-bond. Jak víme, durace zero-bondu je rovna době do splatnosti. Durace dluhopisu s pohyblivým úročením je znázorněna na obr. 14.1.



Obr 14.1 Durace dluhopisu s pohyblivým úročením

14.2.2 Durace portfolia

Jelikož firmy mívají ve svém portfoliu velké množství úrokově citlivých aktiv a závazků, je nutno vypočítat duraci celého portfolia, známe-li durace jednotlivých cenných papírů. Následující výpočet není sice přesný (předpokládá plochou výnosovou křivku a její paralelní posun), ale pro praktické použití se ukazuje dostačující.

Předpokládejme, že máme portfolio složené z *n* druhů úrokově citlivých cenných papírů, které mají všechny stejný výnos do doby splatnosti a jejich ceny a durace jsou P_i a Dur_i. Potom durace portfolia je

$$Dur = w_1 \cdot Dur_1 + w_2 \cdot Dur_2 + \ldots + w_n \cdot Dur_n, \qquad \textbf{(14-9)}$$

kde $w_i = \dfrac{\text{tržní hodnota } i\text{-tého cenného papíru}}{\text{tržní hodnota portfolia}}.$

Jinak řečeno, durace portfolia je rovna váženému součtu durací jednotlivých cenných papírů, kde váha je určena vahou investice do daného cenného papíru.

V praxi se ukazuje, že při malých změnách tržní úrokové míry durace poměrně přesně aproximuje změnu ceny cenného papíru. Při větších změnách úrokové míry však odhady změny bývají nepřesné, a proto se používá další veličiny nazývané konvexita.

14.3 Konvexita

Durace je určena na základě první derivace ceny. Důsledkem je, že cenovou změnu aproximujeme přímkou a to vede k určité chybě. Lepší aproximace můžeme docílit zahrnutím členu druhého řádu. Tento člen je určen na základě druhé derivace ceny podle úrokové míry a nazývá se konvexita, což je relativní křivost cenové křivky. Konvexita je definována jako[48]

$$Conv = \frac{1}{P}\frac{d^2P}{di^2}. \qquad \textbf{(14-10)}$$

Jestliže předpokládáme fixní kupon pravidelně vyplácený m krát ročně, potom konvexita bude dána

$$Conv = \frac{1}{P}\cdot\frac{1}{m^2}\cdot\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{k\cdot(k+1)}{(1+\frac{i}{m})^{k+2}}\cdot\frac{C}{m}+\frac{N\cdot(N+1)}{(1+\frac{i}{m})^{N+2}}\cdot JH\right], \qquad \textbf{(14-11)}$$

kde N je počet platebních period;
C je velikost kuponové platby v ročním vyjádření.

Cenovou změnu se zahrnutím konvexity lze vyjádřit následovně:

$$\Delta P = -Dur\cdot\frac{P}{1+i}\cdot\Delta i+\frac{1}{2}P\cdot Conv\cdot(\Delta i)^2$$

nebo s použitím modifikované durace

$$\Delta P = -D_M\cdot P\cdot\Delta i+\frac{P\cdot Conv}{2}\cdot(\Delta i)^2.$$

---

[48] Čtenář znalý matematiky si jistě povšiml, že při aproximaci cenové změny se používá Taylorova rozvoje. Použití durace bere v úvahu jen člen prvního řádu, použití konvexity přibírá i člen druhého řádu.

Výraz $(\Delta i)^2$ je vždy kladný, ale velmi malý. Např. při změně o půl procenta $\Delta i = 0{,}005$ máme $(\Delta i)^2 = 0{,}005^2 = 0{,}000025$. Proto se konvexita vyplácí jen při větších úrokových změnách. Lze říci, že pozice s vysokou konvexitou je sázka na vysokou volatilitu úrokových měr a nikoli na směr pohybu úrokových měr.

Podobně jako u durace se zavádí tzv. **dolarová (korunová) konvexita**, která je definována jako druhá derivace ceny podle tržní úrokové míry:

$$\$C = \frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}i^2}.$$

Je zřejmé, že pro vztah mezi konvexitou a dolarovou konvexitou, platí

$$\$C = P \cdot Conv.$$

Vlastnosti

- Konvexita kuponové obligace roste s rostoucí durací.
- Konvexita zero-bondu je
  $$\frac{N\left(N+1\right)}{\left(1+i\right)^2}.$$
- Konvexita perpetuity je $\dfrac{2}{i^2}$.
- Konvexita portfolia je rovna váženému součtu konvexit jednotlivých cenných papírů[49]:
  $$C_P = \sum_{j=1}^{n} w_i C_i,$$
  kde w_i je váha investice do dané obligace.

---

[49] Platí to samé jako pro duraci portfolia. Vzorec není přesný (předpokládá plochou výnosovou křivku a její paralelní posun). V praxi se celkem osvědčuje.

Příklad 14-2 *Srovnání konvexity a durace při odhadu změny ceny dluhopisu*

Určete změnu ceny zero bondu se splatností 20 let, jestliže současná tržní úroková sazba je 10% a zvýší se o 1 % na 11 %. Vstupní údaje jsou

	Doba do splatnosti	Jmenovitá hodnota	Současná hodnota (cena)	Durace ($ Durace)	Konvexita ($ Konvexita)
Zero-bond	20	100	14,864	20 (–270,255)	347,11 (5 159,531)

Chceme vypočítat změnu ceny zero-bondu použitím durace a konvexity a srovnat ji se skutečnou změnou ceny.

<u>Řešení</u>

Odhad ceny použitím durace

$$P = 14{,}864 + \$D \cdot \Delta i = 14{,}864 - 270{,}255 \cdot 0{,}01 = 12{,}161.$$

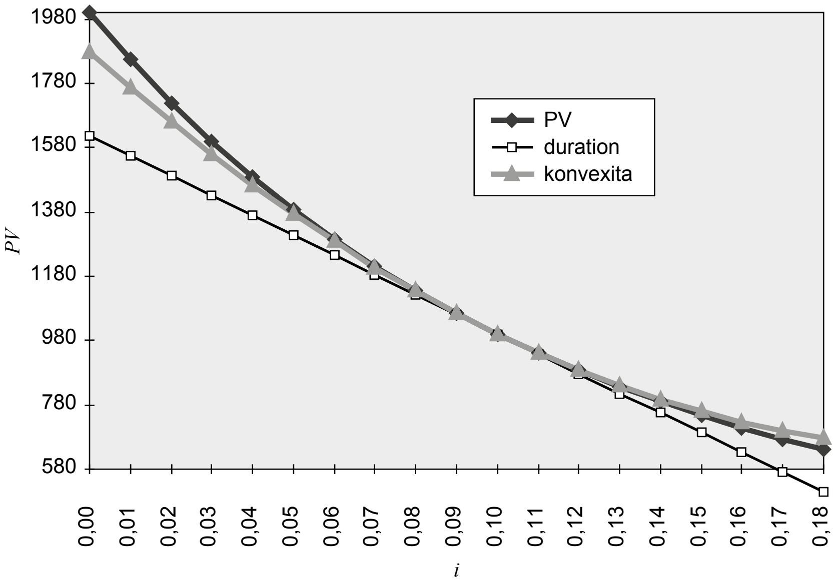
Odhad ceny použitím konvexity

$$P = 14{,}864 + \$D \cdot \Delta i + \frac{1}{2} \cdot \$C \cdot (\Delta i)^2 =$$

$$= 14{,}864 - 270{,}255 \cdot 0{,}01 + \frac{1}{2} \cdot 5\,159{,}531 \cdot 0{,}0001 = 12{,}419.$$

Teoretická cena zero-bondu (dluhopisu s nulovým kuponem) při úrokové míře 11 %

$$P = \frac{100}{(1+0{,}11)^{20}} = 12{,}407.$$



Obr. 14.2 Srovnání konvexity a durace (ilustrace)

14.4 Imunizace

Durace jako míra citlivosti dluhopisu na změnu tržních úrokových sazeb umožňuje techniku nazývanou imunizace. Portfolio firem se často skládá z úrokově citlivých aktiv a závazků. Přirozeným předpokladem úspěšného zvládnutí takového portfolia je rovnost současných hodnot aktiv a závazků. Pokud by se úrokové míry nezměnily, pak manažer vždy, když musí provést platbu, prodá příslušnou část aktiv. Jestliže však nastane změna úrokových měr, pak se hodnota aktiv a závazků nemusí změnit o stejnou hodnotu. Metoda imunizace umožňuje sestavit portfolio takovým způsobem, aby bylo necitlivé alespoň na malé změny úrokových měr. Vyžaduje určité zjednodušující předpoklady, ale bývá v praxi poměrně úspěšná. Metodu si vysvětlíme na následujícím příkladě.

Příklad 14-3

Předpokládejme, že firma musí provést jednu platbu ve velikosti 10 000 000 Kč za dva roky. Manažer uvažuje, jak prostředky do té doby investovat. K dispozici jsou následující dluhopisy se splatností 1 a 3 roky:

Dluhopis	Kupon	Jmenovitá hodnota	Doba do splatnosti	Cena	Úroková míra	Durace
A	7 %	10 000	1 rok	9 727,30	10 %	1
B	8 %	10 000	3 roky	9 502,50	10 %	2,78

Předpokládáme, že výnosová křivka je plochá s hodnotou 10 % a kupony jsou vypláceny na konci roku.

Řešení

Současná hodnota platby za 2 roky bude $8\,264\,460 = \dfrac{10\,000\,000}{(1+0{,}1)^2}$.

Kdyby manažer vše investoval do ročních dluhopisů, pak čelí reinvestičnímu riziku. Tyto dluhopisy budou za rok splaceny, ale pokud se mezitím tržní úrokové míry snížily, pak koupě nových ročních dluhopisů bude dražší než se předpokládalo. Pokud by investoval veškerou částku do tříletých dluhopisů, pak čelí riziku prodejní ceny, neboť dluhopisy bude muset za dva roky prodat. Při vzestupu úrokových měr by ceny dluhopisů poklesly a závazek by nemusel být splněn. Shrneme-li předcházející úvahy, pak vzestup úrokových měr snižuje ceny dluhopisů, ale zlepšuje reinvestiční možnosti. Na druhé straně pokles úrokových měr zvyšuje ceny dluhopisů, ale zhoršuje reinvestiční podmínky. Manažer musí nalézt správný poměr investic do jednoletých a tříletých dluhopisů, aby se pozitivní a negativní vlivy vyvážily.

Ukážeme si, že jestliže se portfolio sestaví tak, aby jeho durace byla rovna 2 (durace závazku), pak při malých změnách úrokové míry se jednotlivé vlivy vyruší a hodnota portfolia bude rovna za dva roky hodnotě závazku 10 000 000 Kč.

Jak víme, durace portfolia se rovná váženému součtu durací jednotlivých cenných papírů. Váhy udávají relativní investici do cenného papíru. Rovnice tedy budou

$$w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 2,78 = 2$$

a

$$w_1 \cdot 8\,264\,460 + w_2 \cdot 8\,264\,460 = 8\,264\,460.$$

První rovnice udává, že durace portfolia se rovná duraci závazků, druhá rovnice vyjadřuje rovnost současných hodnot aktiv (levá strana) a závazků (pravá strana)[50].

Řešením rovnic je

$$w_1 = 0,4382,$$
$$w_2 = 0,5618.$$

To znamená, že manažer by měl investovat 43,82 % prostředků do ročních dluhopisů a 56,18 % do tříletých dluhopisů. Jelikož současná hodnota závazku je 8 264 460 Kč, bude investováno 3 621 490 Kč do ročních obligací a 4 642 970 Kč do tříletých obligací.

Nyní si ukážeme, že hodnota portfolia bude na konci druhého roku rovna (přibližně) 10 mil. Kč, jestliže bude úroková míra na konci prvního roku rovna postupně 9 %, 10 %, 11 %.

	Hodnota v čase $t = 2$ při úrokové míře v čase $t = 1$		
	9 %	10 %	11 %
Hodnota reinvestovaných ročních obligací v čase $t = 2$	4 350 299	4 381 970	4 421 810
Hodnota reinvestovaných kuponů z času $t = 1$ v čase $t = 2$	425 536	429 970	433 880
Hodnota kuponů z času $t = 2$	390 400	390 880	390 880
Prodejní cena tříletých obligací v čase $t = 2$	4 835 229	4 797 160	4 753 950
Hodnota portfolia na konci druhého roku[51]	10 001 464	9 999 980	10 000 520

[50] Připomínáme, že váha w se rovná podílu investice do daného aktiva ku celkové investici. Druhá rovnice se po zkrácení redukuje na rovnici, že součet vah se rovná 1.

[51] Důvod proč jsme nedostali v součtu částku 10 000 000 plyne jednak ze zaokrouhlování (kupovali jsme celý počet obligací) a jednak z toho, že durace pouze aproximuje a nedává přesnou hodnotu.

Ukážeme si, jak se prováděl výpočet pro úrokovou míru 9 %, která nastala před koncem prvního roku. Upozorněme, že investice 3 621 490 Kč znamená koupi 373 kusů ročních dluhopisů (373 ≅ 3 621 490 / 9 722,3) a investice 4 642 970 Kč znamená koupi 488 kusů tříletých dluhopisů (488 ≅ 4 642 970 / 9 502,5).

- **Hodnota reinvestovaných ročních dluhopisů v čase $t = 2$**

  Na konci prvního roku jsme z ročních dluhopisů obdrželi částku

  $373 \cdot 10\,700 = 3\,991\,100.$

  Za tuto částku jsme nakoupili znovu roční obligace, které nesou úrok 9 %. Jejich celková hodnota na konci druhého roku bude

  $3\,991\,100 \cdot 1{,}09 = 4\,350\,299.$

- **Hodnota reinvestovaných kuponů**

  Hodnota kuponů z tříletých dluhopisů bude v prvním i druhém roce

  $488 \cdot 10\,000 \cdot 0{,}08 = 390\,400.$

  Vyplacené kupony z prvního roku reinvestujeme do ročních dluhopisů a na konci druhého roku bude jejich hodnota

  $390\,400 \cdot 1{,}09 = 425\,536.$

- **Prodejní cena tříletých dluhopisů bude na konci druhého roku**

  $$\frac{10\,800 \cdot 488}{1{,}09} = 4\,835\,229.$$

V případě, že úroková míra zůstane nezměněna nebo se zvýší, bude výpočet obdobný.

Obecný přístup

Nyní se zdá snadné zobecnit uvedený přístup. Jestliže budeme mít několik závazků v budoucnosti a budeme je chtít vyplnit investicemi do úrokově citlivých aktiv, pak imunizované portfolio bude řešením následujících rovnic (symbolicky zapsáno):

Durace aktiv = Durace závazků;

Současná hodnota aktiv = Současná hodnota závazků.

Uvedený příklad vycházel z několika omezujících předpokladů. Byl to jednak předpoklad ploché výnosové křivky (úrokové míry na všechna období byly rovny 10 %). Druhý předpoklad je, že veškeré posuny výnosové křivky budou paralelní a nastanou před koncem prvního roku. Existují složitější postupy, které berou v úvahu různé úrokové míry na různá období (nekonstantní výnosovou křivku) a různé pohyby jednotlivých úrokových měr. Podle některých autorů však zde uvedený jednoduchý přístup dává nejlepší výsledky.

V našem případě jsme měli k dispozici dvě obligace a dvě rovnice, které měly jedno řešení. Imunizované portfolio bylo proto možno sestavit pouze jediným způsobem. Kdybychom měli k dispozici více obligací, pak by soustava rovnic měla více řešení a imunizované portfolio by bylo možno sestavit více způsoby. Naskýtá se otázka, které portfolio vybrat. Odpověď závisí na tom, jaké kriterium přijmeme. Nabízejí se následující možnosti:

- Vybrat portfolio s maximálním průměrným výnosem do doby splatnosti. Průměrný výnos se vypočítá jako vážený součet výnosů do splatnosti, kde váhy udávají relativní investici do daného cenného papíru (w_i).
- Vybrat portfolio, kde doby splatnosti jednotlivých papírů mají minimální odchylku od dob splatnosti závazků. Takové portfolio minimalizuje tzv. „riziko náhodného procesu“. V předcházejícím příkladě je portfolio složené z jednoletých a tříletých obligací z tohoto hlediska lepší než např. portfolio z obligací půlročních a pětiletých .

Pro imunizaci je rovněž možno použít konvexitu. Místo dvou rovnic dostáváme rovnice tři. Kromě rovnosti současných hodnot a durací aktiva a závazků, třetí rovnice vyjadřuje rovnost konvexit.

Příklad 14-4 *Použití konvexity v imunizaci*

Pojišťovna má trvalý závazek plateb v životním pojištění 1 000 000 dolarů ročně. K dispozici jsou zero bondy se splatností 1, 10 a 30 let. V jakých proporcích investovat do jednotlivých bondů, aby bylo portfolio imunizováno. Výnosová křivka je plochá a současná úroková míra je 10 %.

	Durace		Konvexita	
1-zero bond	N	1	$\frac{N(1+N)}{(1+i)^2}$	1,65
10-zero bond	N	10	$\frac{N(1+N)}{(1+i)^2}$	90,91
30- zero bond	N	30	$\frac{N(1+N)}{(1+i)^2}$	768,60
Perpetuita	$1+i/i$	200	$\frac{2}{i^2}$	200

Řešení

Označme si postupně x_1, x_{10}, x_{30} částky investované do jednotlivých zero bondů. Současná hodnota trvalé platby (perpetuity) je 10 000 000 dolarů. Aby bylo portfolio imunizováno s použitím konvexity musí se rovnat současné hodnoty aktiv a závazků, tj.

$$x_1 + x_{10} + x_{30} = 10\,000\,000,$$

durace aktiv a závazků

$$-\frac{1}{1{,}1}\left(x_1 + 10x_{10} + 30x_{30}\right) = \frac{1}{1{,}1}\cdot 11\cdot 10$$

a konvexity aktiv a závazků

$$1{,}65x_1 + 90{,}91x_{10} + 768{,}60x_{30} = 200\cdot 10.$$

Řešením této soustavy lineárních rovnic o třech neznámých je

$$x_1 = 3\,480\,000,$$
$$x_{10} = 4\,450\,000,$$
$$x_{30} = 2\,070\,000.$$

Tato čísla udávají částky, které je třeba na počátku investovat do jednotlivých bondů.

Užití konvexity (spolu s durací) umožňuje těsnější sepjetí aktiv a závazků i pro větší změny v úrokových mírách.

Důležité

Je třeba si uvědomit jednu zásadní věc. Imunizace je dynamická záležitost. Portfolia je třeba neustále upravovat, aby byly splněny (alespoň rámcově) příslušné rovnice. Dokonce i v případě, kdy nenastává žádný pohyb úrokových měr, ubíhající čas mění současné hodnoty, durace a konvexity a rovnosti přestávají platit. Závisí na dovednosti risk managera, jak a po jaké době bude portfolio upravovat. Např. v příkladu 1, kdyby vzestup úrokové míry z 10 % na 11 % (za uvedeného složení aktiv) nastal v průběhu druhého roku, nebyl by manager schopen splnit závazek. (Proč?)

Použití úrokových swapů pro změnu durace

Standardní úrokový swap (plain vanila) je kontrakt mezi dvěma stranami zavazující platit jedna druhé úrokové platby z daného nominále. První strana provádí platby na základě fixní úrokové míry, druhá strana provádí platby na základě pohyblivé úrokové míry (např. LIBOR, PRIBOR apod.). Platby probíhají v pravidelných intervalech a placen je pouze rozdíl. To znamená, že v případě, že pohyblivá sazba je vyšší než fixní, zaplatí plátce pohyblivé sazby rozdíl úrokových plateb plátci fixní platby. Naopak je-li pohyblivá sazba nižší než pevná, zaplatí rozdíl plátce fixní sazby.

Fixní platba ve swapu se určuje tak, aby hodnota swapu na počátku byla nulová. To nám umožňuje představit si swap tak, že plátce fixní platby vydal dluhopis s pevnou kuponovou platbou a koupil si dluhopis s plovoucí kuponovou platbou. Oba dluhopisy mají stejnou jmenovitou hodnotu rovnou nominální hodnotě swapu a stejnou dobu splatnosti. Fixní kupon se rovná fixní swapové sazbě a pohyblivý kupon se rovná pohyblivé swapové sazbě.

Úrokový swap se používá hlavně k řízení úrokového rizika. Lze jej např. použít k změně plovoucích plateb z půjček na pevné a naopak, nebo využitím určitých neefektivností trhu získat (za pomoci swapu) výhodnější podmínky úvěru. Velmi efektivní je jejich použití při změně durací aktiv a závazků.

Jelikož úrokový swap lze chápat jako portfolio dluhopisů s plovoucím a fixním kuponem, lze duraci swapu snadno určit. Dluhopis s pohyblivou sazbou má duraci rovnou době do splatnosti následujícího kuponu, takže durace swapu bude (aproximativně) určena ***rozdílem doby do splatnosti následujícího pohyblivého kuponu a durace obligace s fixním kuponem.***

Jelikož cena swapu je na počátku nulová, lze jeho použitím změnit duraci aktiv nebo závazků tak, aniž bychom změnili jejich současnou hodnotu.

15. Měření výkonnosti portfolia

Jestliže chceme vypočítat výnosnost jednotlivé investice, je postup poměrně jednoduchý. Stačí znát pouze hodnotu vložené peněžní částky na počátku a koncovou hodnotu a pak použít některý z vhodných vzorců podle toho, zda výnosnost počítáme na základě jednoduchého, složeného nebo spojitého úročení. Situace ale zkomplikuje, jestliže v průběhu časové periody (rok, měsíc) nastávají peněžní toky. V případě investičních fondů to jsou vklady a výběry různých investorů, u bankovních portfolií zase různé změny v tocích peněžních prostředků.

Je několik způsobů, jak měřit výkonnost portfolia. Ukážeme si dva základní přístupy: časově vážené metody (TWR) a peněžně vážené metody (MWR). Oba přístupy mají své přednosti a nedostatky. Časově vážené metody eliminují vliv peněžních toků, ale někdy dávají intuitivně nepřijatelné výsledky. Jsou vhodné pro měření výkonnosti portfolio manažera, ale pro investory se mohou jevit jako nevhodné. Naopak MWR jsou více vhodné pro investory, protože zohledňují skutečný stav portfolia, na druhou stranu se mohou jevit jako nevyhovující pro portfolio manažera, neboť berou v úvahu externí peněžní toky, které manažer nemůže ovlivnit.

15.1 Časově vážené metody (TWR)

Tyto metody eliminují vliv vložených částek, které nemůže manažer ovlivnit, a měřená výkonnost závisí pouze na celkovém časovém intervalu. Jsou vhodné k měření výkonnosti manažera. Pro investory mohou v některých situacích dávat zavádějící výsledky.

Časové období T je rozděleno na subperiody podle toho, kdy nastávají externí peněžní toky. Pokud nastávají peněžní toky na začátku subperiody, pak

$$1+r=\frac{V_1}{V_S}\cdot\frac{V_2}{V_1+C_1}\cdot\ldots\cdot\frac{V_{n-1}}{V_{n-2}+C_{n-2}}\cdot\frac{V_E}{V_{n-1}+C_{n-1}}, \qquad \textbf{(15-1)}$$

kde C_i i-tý čistý peněžní tok (vklady mínus výběry);
V_S tržní hodnota portfolia na počátku;
V_E tržní hodnota portfolia na konci periody;
V_i tržní hodnota portfolia před peněžním tokem C_i.

Pokud peněžní tok nastává na konci subperiody, pak

$$1+r=\frac{V_1-C_1}{V_S}\cdot\frac{V_2-C_2}{V_1}\cdot\ldots\cdot\frac{V_{n-1}-C_{n-1}}{V_{n-2}}\cdot\frac{V_E-C_n}{V_{n-1}}, \qquad \textbf{(15-2)}$$

kde C_i i-tý čistý peněžní tok (vklady mínus výběry);
V_S tržní hodnota portfolia na počátku;
V_E tržní hodnota portfolia na konci periody;
V_i tržní hodnota portfolia po peněžním toku C_i.

Příklad 15-1 *Toky na konci subperiody*

Předpokládejme období jednoho měsíce (30 dnů). Na počátku byla vložena částka 74 200 Kč, desátého dne byla opět vložena částka 37 100 Kč a dvacátý den byla vybrána částka 25 000 Kč. Hodnota portfolia desátý den (spolu s vloženou částkou 37 100 Kč) byla 103 100 Kč, hodnota portfolia dvacátého dne (po vybrání částky 25 000 Kč) byla 104 400 Kč a koncová hodnota portfolia na konci měsíce byla 109 000 Kč.

V tomto případě nastávaly toky na konci každé subperiody.

Máme tedy

$V_s = 74\,200$ $C_1 = 37\,100$
$V_1 = 103\,100$ $C_2 = -25\,000$
$V_2 = 104\,400$
$V_E = 109\,000$

Dosazením do vzorce máme

$$1+r=\frac{103\,100-37\,100}{74\,200}\cdot\frac{104\,400+25\,000}{103\,100}\cdot\frac{109\,000}{104\,400},$$

$r = 16{,}5579.$

Poznámka
Výkonnost portfolia nezávisí na načasování peněžních toků. Pokud by nastaly např. 5. a 29. den, byla by výsledná hodnota stejná.

Příklad 15-2 *Toky na začátku subperiody*

Vyjdeme částečně ze zadání předchozího příkladu. Tedy na počátku byla vložena částka 74 200 Kč, desátého dne byla opět vložena částka 37 100 Kč a dvacátý den byla vybrána částka 25 000 Kč. Hodnoty portfolia těsně před peněžními toky byly postupně 66 000 Kč a 129 400 Kč a hodnota portfolia na konci měsíce 109 000 Kč.

$V_s = 74\,200 \qquad C_1 = 37\,100$
$V_1 = 66\,000 \qquad C_2 = -25\,000$
$V_2 = 129\,400$
$V_E = 109\,000$

Dosazením do vzorce máme

$$1+r = \frac{66\,000}{74\,200} \cdot \frac{129\,400}{66\,000+37\,100} \cdot \frac{109\,000}{129\,400-25\,000},$$

$r = 16{,}5579.$

Poznámka
Když se podrobněji zamyslíme nad oběma příklady, tak se jedná o jednu a tu samou situaci. Proto obě TWR metody musely dát stejný výsledek. Záleží na uživateli, kterou si vybere. Základní rozdíl spočívá v tom, že metoda s peněžními toky na konci subperiod vyžaduje znalost hodnoty portfolia i se započtením toku, zatímco metoda s toky na začátku subperiody vyžaduje znalost hodnoty portfolia bez započtení toku.

15.2 Peněžně vážené metody (MWR)

Peněžně vážené metody (na rozdíl od MWR) zohledňují množství peněžních prostředků v portfoliu. Tyto metody můžeme rozdělit na dvě třídy:

- Dietzovu metodu
- Metodu vnitřní výnosnosti

15.2.1 Modifikovaná Dietzova metoda

Každý peněžní tok je vážen množstvím času, po který byl držen v portfoliu.

$$r = \frac{V_E - V_S - \sum C_i}{V_S + \sum w_i \cdot C_i}, \qquad \textbf{(15-3)}$$

kde w_i počet dnů od okamžiku toku C_i do konce periody / celkový počet dnů časové periody; váha peněžního toku, který nastal v čase t.

Původní Dietzova metoda předpokládala, že všechna $w_i = 0{,}5$, tedy že nastávají uprostřed periody.

Příklad 15-3

Vyjdeme ze zadání předchozího příkladu. Z uvedených hodnot portfolia potřebujeme pouze počáteční hodnotu $V_s = 74\ 200$ a koncovou hodnotu $V_E = 109\ 000$. Váhy pak jsou

$w_1 = (30 – 10) / 30 = 0{,}6667,$
$w_2 = (30 – 20) / 30 = 0{,}3333.$

Dosazením do vzorce máme

$r = 109\ 000 – 74\ 200 – (37\ 100 – 20\ 000) /$
$/ (74\ 200 + 0{,}6667 \cdot 37\ 100 – 0{,}3333 \cdot 20\ 000),$

$r = 25{,}0552.$

15.2.2 Srovnání metod

Srovnáme nyní TWR metodu s Dietzovou metodou.

Předpokládejme časovou periodu 1 měsíc (30 dnů). Na počátku je vložena částka 200 000 Kč. Dvacátého dne je vložena další částka 400 000 Kč a po vložení této částky má portfolio hodnotu 800 000 Kč. Na konci měsíce má pak portfolio hodnotu 500 000 Kč. Vypočítejme výkonnost portfolia TWR metodou (toky na konci subperiody) a modifikovanou Dietzovou metodou.

TWR metoda $r = 25\ \%$

Modifikovaná Dietzova metoda $r = –30\ \%$

Vidíme velmi podstatný rozdíl ve výsledcích. Je to způsobeno tím, že v první subperiodě nastalo velmi významné zhodnocení vložené částky, ale tato částka byla relativně nízká. V druhé subperiodě bylo portfolio znehodnoceno. Znehodnocení bylo sice relativně nižší než předchozí zhodnocení, ale částka byla vysoká (800 000 Kč). Pokud chceme hodnotit výkonnost manažera, jeví se r = 25 % jako vhodnější míra. Na druhou stranu investory bude spíše zajímat konečná částka, a ta je nízká. Oba investoři utrpí ztrátu a míra výkonnosti –30 % bude lépe odpovídat skutečné situaci. Příklad je sice poněkud extrémní, ale vyjadřuje skutečnost, s kterou se můžeme setkat při čtení zpráv o výkonnosti portfolií investičních fondů. Fondy samozřejmě preferují při zveřejňování lepší hodnoty, a to vede někdy k velmi tristním situacím.

15.2.3 Vnitřní výnosové procento (IRR internal rate of return)

IRR je v podstatě výnosnost do doby splatnost, která je známá z teorie dluhopisů.

$$V_E = V_S \cdot (1+r)^T + \sum \left[C(t) \cdot (1+r)^{(T-t)} \right], \tag{15-4}$$

kde T délka časového horizontu;
V_E je konečná hodnota portfolia;
V_T počáteční hodnota portfolia;
$C(t)$ peněžní tok v čase t;
r IRR za čas T (neznámá).

Pro metodu IRR neexistuje explicitní vzorec pro jeho výpočet a je třeba použít numerické metody (většinou Newton – Raphsonovu metodu). Tyto metody vyžadují počáteční odhad, a protože vztah má obecně více řešení, může vzniknout problém, které je to správné. Za hlavní nedostatek se považuje velká výpočetní náročnost zvláště v případech, kdy v daném období existuje mnoho peněžních toků. Pokud např. se uvažuje období 1 rok a každý týden nastal jeden tok, pak je téměř nemožné úkol rozřešit.

Příklad 15-4

Předpokládejme měsíční časovou periodu (30 dnů). Na počátku je hodnota portfolia 50 000 Kč, desátý den je vloženo 20 000 Kč a dvacátý den je vybráno 10 000 Kč. Konečná hodnota portfolia třicátý den je 70 000 Kč.

Řešení

Zapišme vztah (15-4) s uvedenými hodnotami:

$$70\,000 = 50\,000 \cdot (1 + r)^3 + 20\,000 \cdot (1 + r)^2 - 10\,000 \cdot (1 + r).$$

Rovnici o neznámé r vyřešíme vhodnou numerickou metodou a dostáváme

$$r = 20{,}22\ \%,$$

což udává desetidenní výnosovou míru. Měsíční výnosová míra je pak její trojnásobek, tedy

$$r = 60{,}66\ \%.$$

16. Akcie

Akcie je cenný papír, který představuje podíl na základním kapitálu akciové společnosti. Majitel akcie – akcionář – má právo podílet se zákonem a stanovami společnosti vymezeným způsobem na jejím řízení, jejím zisku a likvidačním zůstatku při případném zániku společnosti.

Každá akcie musí znít na určitou **jmenovitou** neboli **nominální hodnotu,** součet nominálních hodnot všech akcií tvoří základní kapitál dané akciové společnosti.

Akcie mohou znít **na jméno** nebo **na majitele,** akcie na majitele se převádějí prostým předáním, akcie na jméno jsou převoditelné rubopisem a předáním akcie. U akcií na jméno vede akciová společnost seznam akcionářů, k účinnosti převodu se vyžaduje zápis o převodu do seznamu akcionářů. Převod takových akcií může být vázán na určité podmínky, dané stanovami společnosti.

Vedle obyčejných neboli kmenových akcií, které dávají výše uvedená práva, zákon připouští, že stanovy společnosti mohou určit vydání i dvou zvláštních druhů akcií:

- **zaměstnanecké akcie** mohou být dle zákona emitovány maximálně v nominálním objemu, nepřekračujícím 5 % základního kapitálu společnosti. Zaměstnanecké akcie musejí znít na jméno a mohou být převáděny pouze mezi zaměstnanci společnosti, popř. mezi zaměstnanci, kteří odešli do důchodu. Stanovy společnosti mohou spojit se zaměstnaneckými akciemi určité výhody;
- **prioritní akcie** dávají svým majitelům přednostní práva týkající se dividendy, nesmí se však jednat o nárok na úrok nezávisle na hospodářských výsledcích společnosti. Stanovy společnosti mohou určit, že s prioritními akciemi není spojeno hlasovací právo. Souhrn nominálních hodnot všech prioritních akcií nesmí však překročit polovinu základního kapitálu.

16.1 Cena akcie

S veřejně obchodovatelnými akciemi se obchoduje na sekundárním kapitálovém trhu za tržní ceny (kurzy akcií), které jsou obecně výsledkem vztahu nabídky a poptávky na trhu. Cena jedné akcie je vyjadřována (na rozdíl od dluhopisů) v absolutní výši, to znamená u nás v korunách.

Výše ceny akcie je ovlivňována řadou nejrůznějších faktorů nejen ekonomických, ale i politických či psychologických. Proto určit teoreticky správnou cenu akcie a odhadnout její chování není jednoduchou záležitostí. Snaží se o to celá řada metod. Za základní jsou považovány:

- **fundamentální akciová analýza** je založena na zkoumání faktorů, působících na cenu akcie a na její vývoj na úrovni makroekonomické, odvětvové i na úrovni jednotlivých společností a jejich vlivu na cenu akcie. Výsledkem je stanovení určité vnitřní hodnoty akcie jako teoreticky správné ceny akcie;
- **technická akciová analýza** vychází na rozdíl od fundamentální analýzy ze zkoumání vývoje na trhu (vývoj cen, objem obchodů atd.), snaží se z něj odvodit určité trendy a podle nich předpovídat krátkodobé pohyby v ceně akcie. Nezaměřuje se tedy na stanovení nějaké správné ceny akcie, ale spíše na identifikaci změn v cenách akcií v krátkém období;
- **psychologická analýza** se soustředí na analýzu psychologie chování investorů, která je považována za velmi významný faktor, ovlivňující cenu akcie;
- akciová analýza založená na **teorii efektivních trhů** vychází z toho, že ceny akcií okamžitě odrážejí všechny dostupné cenotvorné informace, vývoj cen akcií je náhodný, a nemá tedy smysl hledat teoreticky správnou cenu.

Vzhledem k zaměření této publikace se omezíme na objasnění některých metod výpočtu vnitřní hodnoty akcie, která je základem fundamentálních akciových analýz.

16.1.1 Dividendový diskontní model

Dividendový diskontní model vychází z toho, že **vnitřní hodnota** akcie je současnou hodnotou veškerých budoucích příjmů, plynoucích z akcie jejímu majiteli. Majiteli akcií mohou z akcie plynout příjmy jednak ve formě dividend, jednak z prodeje akcie. Pokud předpokládáme, že budeme akcii držet po dobu jednoho roku, můžeme vnitřní hodnotu akcie stanovit jako:

$$VH = \frac{D_1 + P_1}{1+r}, \tag{16-1}$$

kde D_1 je očekávaná dividenda na konci prvního roku;
P_1 je očekávaná cena na konci prvního roku;
r je úroková sazba, resp. požadovaná výnosnost, vyjádřená jako desetinné číslo[52].

Cenu akcie na konci prvního roku (P_1) můžeme určit zcela shodným způsobem, to znamená opět jako současnou hodnotu budoucích příjmů z akcie, kterými v časovém horizontu jednoho roku jsou opět dividendy a cena akcie na konci roku, za kterou ji můžeme prodat. Tedy platí:

$$P_1 = \frac{D_2 + P_2}{1+r}, \tag{16-2}$$

kde D_2 je očekávaná dividenda na konci druhého roku;
P_2 je očekávaná cena na konci druhého roku;
r je požadovaná výnosnost, vyjádřená jako desetinné číslo.

Shodně můžeme určit cenu na konci druhého roku a dále na konci každého dalšího roku. Dosadíme-li potom do vztahu (16-1) výši prodejní ceny na konci prvního roku podle vztahu (16-2) a postupujeme-li analogicky i pro další roky, můžeme **vnitřní hodnotu akcie pro n-let** vyjádřit jako:

$$\begin{aligned} VH &= \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \frac{D_3}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{D_n + P_n}{(1+r)^n} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{(1+r)^j} + \frac{P_n}{(1+r)^n}, \end{aligned} \tag{16-3}$$

kde D_j, D_n je očekávaná dividenda na konci j-tého, resp. n-tého roku;
P_n je očekávaná cena na konci n-tého roku;
r je požadovaná výnosnost, vyjádřená jako desetinné číslo.

---

[52] Vzhledem k tomu, že cena akcie nás zajímá většinou z pohledu investora, úroková sazba, kterou diskontujeme budoucí příjmy plynoucí z akcie, potom představuje výnosnost investice do akcie. Proto se v těchto vzorcích obvykle dosazovaná úroková sazba označuje jako investorem požadovaná výnosnost, ve které se neodráží jen časová hodnota peněz, ale i riziko spojené s investicí do akcie.

Vzhledem k tomu, že akcie je majetkovým cenným papírem a nemá stanovenou splatnost, musíme pro stanovení vnitřní hodnoty uvažovat s nekonečně dlouhou dobou, neboli ve vzorci (16-3) $n \to \infty$. V tomto případě je současná hodnota ceny akcie na konci n-tého roku nulová[53] a vnitřní hodnotu akcie potom můžeme zapsat jako:

$$VH = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_j}{(1+r)^j}, \qquad \textbf{(16-4)}$$

kde D_j je očekávaná dividenda na konci j-tého roku;
r je požadovaná výnosnost vyjádřená jako desetinné číslo.

Při praktickém využití se obvykle neodhaduje absolutní výše dividend v jednotlivých letech, ale spíše očekávaný růst dividend. V případě **konstantního růstu dividend** pro dividendu na konci j-tého roku platí:

$$D_{j+1} = D_j \cdot (1+g), \qquad \textbf{(16-5)}$$

kde D_{j+1} je výše dividendy na konci roku $j+1$;
D_j je výše dividendy na konci j-tého roku;
g je konstantní roční míra růstu dividend.

Potom můžeme vzorec pro vnitřní hodnotu akcie zapsat jako:

$$VH = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_0 \cdot (1+g)^j}{(1+r)^j} = D_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1+g)^j}{(1+r)^j}, \qquad \textbf{(16-6)}$$

kde D_0 je dividenda na konci minulého roku;
g je konstantní roční míra růstu dividend;
r je požadovaná výnosnost vyjádřená jako desetinné číslo.

Za předpokladu, že požadovaná výnosnost je vyšší než očekávaná konstantní míra růstu dividend ($r > g$), můžeme s využitím vzorce pro výpočet součtu nekonečné řady vyjádřit výši vnitřní hodnoty akcie při konstantní očekávané míře růstu dividend jako:

---

53 $\frac{P_n}{(1+r)^n} = 0$ pro $n \to \infty$.

$$VH = D_0 \cdot \frac{1+g}{r-g}, \qquad \textbf{(16-7)}$$

kde D_0 je dividenda na konci minulého roku;
g je konstantní roční míra růstu dividend;
r je požadovaná výnosnost, vyjádřená jako desetinné číslo,

neboli vzhledem k platnosti vztahu $D_0 \cdot (1+g) = D_1$ platí:

$$VH = \frac{D_1}{r-g}. \qquad \textbf{(16-8)}$$

Za zvláštní případ lze považovat situaci, kdy budeme očekávat **konstantní absolutní výši dividend** v jednotlivých letech, neboli budeme očekávat nulový růst dividend (g = 0). V tomto případě můžeme dle vztahu (16-8) vnitřní hodnotu akcie vyjádřit jako:

$$VH = \frac{D}{r}, \qquad \textbf{(16-9)}$$

kde D je konstantní absolutní výše dividend v jednotlivých letech;
r je požadovaná výnosnost, vyjádřená jako desetinné číslo.

Vzorec (16-9) musí být samozřejmě shodný se vzorcem pro stanovení ceny dluhopisu, který nemá stanovenou splatnost (tzv. konzoly)[54]. Rozdíl by byl pouze v tom, že pokud bychom za r dosazovali požadovanou míru výnosu, potom by za jinak nezměněných okolností měla být její hodnota u akcií vzhledem k vyššímu riziku vyšší než u dluhopisu.

Příklad 16-1 *Výpočet vnitřní hodnoty akcie*

Stanovte vnitřní hodnotu akcie firmy za předpokladu, že očekáváte výši dividendy na konci prvního roku 120 Kč a uvažujete 14% požadovanou míru výnosnosti, přičemž předpokládáte a) konstantní absolutní výši dividend v jednotlivých letech, b) konstantní roční míru růstu dividend ve výši 10 %.

---

[54] Viz oddíl 13.1.

Řešení

a) V případě konstantní absolutní výše dividend je podle vztahu (16-9) vnitřní hodnota akcie dána:

$$VH = \frac{D}{r} = \frac{120}{0{,}14} = 857.$$

Vnitřní hodnota akcie při konstantní absolutní výši dividend činí 857 Kč.

b) V případě konstantního růstu roční míry růstu dividend je vnitřní hodnota podle vztahu (16-8):

$$VH = \frac{D_1}{r-g} = \frac{120}{0{,}14-0{,}10} = 3\,000.$$

V případě očekávaného růstu dividend ve výši 10 % ročně činí vnitřní hodnota akcie 3 000 Kč.

16.1.2 Ziskové modely

Ziskové modely vycházejí při hledání vnitřní hodnoty akcie z ukazatele poměru mezi cenou akcie a ziskem na jednu akcii, pro který se velmi často používá anglické označení *price-earnings ratio* (P/E). Tento ukazatel je definován jako:

$$P/E = \frac{P}{E}, \tag{16-10}$$

kde P/E je ukazatel *price-earnings ratio*;
P je tržní cena akcie;
E je čistý zisk, připadající na jednu akcii.

Tento ukazatel nachází široké využití při hodnocení firem. Je s ním však spojeno nemalé nebezpečí zkreslení vlivem používaných účetních metod, jednorázových finančních transakcí; vykazuje navíc v různých odvětvích různé střední hodnoty. Proto při jeho interpretaci je třeba postupovat velmi obezřetně.

Při využití ukazatele P/E ke stanovení vnitřní hodnoty se postupuje následujícím způsobem: nejprve se odhadne určitá normální hodnota ukazatele P/E. K tomu se využívá různých metod, např. metoda založená na dividendovém diskontním modelu nebo regresní metoda, která počítá P/E jako funkci určitých veličin, či komparativní metoda vycházející ze srovnání P/E jednotlivé akcie s agregátním P/E. Vnitřní hodnotu akcie potom ve druhém kroku dostaneme jako součin normální hodnoty ukazatele P/E a očekávaného zisku na jednu akcii v následujícím roce, což můžeme zapsat jako:

$$VH = E_1 \cdot P / E_{norm}, \tag{16-11}$$

kde VH je vnitřní hodnota akcie;
E_1 je očekávaný zisk na jednu akcii v následujícím roce;
P/E_{norm} je normální hodnota ukazatele P/E.

16.2 Předkupní právo

Akciová společnost může zvýšit svůj základní kapitál emisí nových, tzv. mladých akcií. Aby se v důsledku toho nesnížil podíl stávajících akcionářů ve společnosti, získávají akcionáři předkupní právo na nákup mladých akcií v poměru, v jakém se podíleli na dosavadním základním kapitálu akciové společnosti.

Nárok na získání předkupního práva získávají všichni akcionáři, kteří drží akcie. Pro určení, zda je či není se zakoupenou akcií spojeno předkupní právo, je rozhodující tzv. **datum ex-předkupní právo** (dále rovněž jen **ex-datum**). Nový majitel akcie, který by ji zakoupil v tento den a později, již se zakoupenou akcií nezískává nárok na předkupní právo na mladé akcie.

Dosavadní akcionáři mají na základě předkupního práva nárok na zakoupení mladých akcií, nikoliv však povinnost. Předkupní právo mohou uplatnit během tzv. **upisovací (odebírací) lhůty.** Během této lhůty může dosavadní akcionář předkupní právo také prodat. **Upisovací cena,** za kterou může majitel předkupního práva zakoupit mladé akcie, je totiž obvykle nižší než aktuální kurz akcie na trhu. Z toho vyplývá, že i předkupní právo má svoji cenu, za kterou může být během upisovací lhůty obchodováno na sekundárním trhu. Pokud by předkupní právo nebylo během upisovací lhůty využito, propadá a stává se bezcenným.

Na jednu dosavadní akcii obvykle připadá jedno předkupní právo, na zakoupení jedné mladé akcie je zapotřebí tolik předkupních práv, kolik určuje tzv. **upisovací (odebírací) poměr,** který je definován jako poměr dosavadního objemu základního kapitálu a objemu zvýšení základního kapitálu, odpovídajícího nově emitovaným mladým akciím, to znamená:

$$UP = \frac{ZK}{\Delta ZK}, \tag{16-12}$$

kde UP je upisovací poměr;
ZK je původní výše základního kapitálu;
ΔZK je objem zvýšení základního kapitálu emisí mladých akcií.

V případě, že nominální hodnota všech původních i mladých akcií je stejná, můžeme výši základního kapitálu vyjádřit jako součin nominální hodnoty jedné akcie a počtu všech akcií. Upisovací poměr potom lze zapsat jako:

$$UP = \frac{NH \cdot k}{NH \cdot m} = \frac{k}{m}, \tag{16-13}$$

kde UP je upisovací poměr;
NH je nominální hodnota jedné akcie;
k, m je počet původních, resp. mladých akcií.

16.2.1 Cena předkupního práva k nákupu mladých akcií

Pokud předkupní právo dává možnost zakoupit mladé akcie za výhodnější kurz, než je aktuální kurz na trhu, potom má předkupní právo určitou cenu. Jaká je teoretická cena tohoto práva?

Odpověď na tuto otázku musíme rozdělit do dvou částí.

Před datem ex-předkupní právo můžeme teoretickou cenu předkupního práva jako součást ceny akcie odvodit z následující úvahy: pokud bychom chtěli v této době získat akcii, můžeme tak v zásadě učinit dvojím způsobem:

- koupit akcii na trhu za aktuální promptní kurz P nebo
- zakoupit upisovacímu poměru (UP) odpovídající počet předkupních práv a na jejich základě poté zakoupit mladou akcii za upisovací cenu (UC).

Rozdíl mezi oběma variantami je v tom, že v prvním případě získáváme při koupi akcie před ex datem spolu s akcií i nárok na předkupní právo, což s mladou akcií, kterou získáme ve druhém případě, již spojeno není. Rozdíl v ceně obou alternativ tedy musí odpovídat právě ceně předkupního práva, to znamená, že musí platit:

$$PC_{PP} - (CPP \cdot UP + UC) = CPP. \qquad \textbf{(16-14)}$$

Úpravou rovnice můžeme vyjádřit cenu předkupního práva:

$$CPP = \frac{PC_{PP} - UC}{UP + 1}, \qquad \textbf{(16-15)}$$

kde CPP je cena předkupního práva;
PC_{PP} je promptní (spotová) cena akcie s předkupním právem;
UC je upisovací cena;
UP je upisovací poměr.

V den či po datu ex-předkupní právo se situace mění v tom, že zakoupením akcie za promptní kurz již nový majitel nezískává nárok na předkupní právo. Proto již v ceně akcie není cena předkupního práva obsažena. Předkupní právo se pak obchoduje odděleně od akcií. V tomto případě jsou výše uvedené alternativy získání akcie (přímé zakoupení akcie nebo zakoupení příslušného počtu předkupních práv a následná koupě akcie za upisovací cenu) v zásadě ekvivalentní. Proto musí platit rovnice:

$$PC_{EX} - (CPP \cdot UP + UC) = 0. \qquad \textbf{(16-16)}$$

Pro výši ceny předkupního práva potom úpravou rovnice dostaneme:

$$CPP = \frac{PC_{EX} - UC}{UP}, \qquad \textbf{(16-17)}$$

kde CPP je cena předkupního práva po ex-datu;
PC_{EX} je promptní cena akcie bez předkupního práva;
UC je upisovací cena;
UP je upisovací poměr.

Příklad 16-2 *Výpočet ceny předkupního práva*

Valná hromada akciové společnosti rozhodla o zvýšení základního kapitálu formou emise nových akcií. Stávající základní kapitál činí 100 mil. Kč a je rozdělen do akcií s nominální hodnotou 1 000 Kč. Předpokládané zvýšení kapitálu je 25 mil. Kč emisí akcií se shodnou nominální hodnotou. Stanovte teoretickou cenu předkupního práva před ex-datem a po něm za předpokladu, že cena akcie před ex-datem byla 1 600 Kč, po ex-datu poklesla na 1 550 Kč a upisovací cena byla stanovena na 1 300 Kč.

Řešení

Nejprve podle vzorce (16-12) stanovíme výši upisovacího poměru:

$$UP = \frac{ZK}{\Delta ZK} = \frac{100\,000\,000}{25\,000\,000} = 4.$$

Cenu předkupního práva před ex-datem stanovíme podle vzorce (16-15):

$$CPP = \frac{PC_{PP} - UC}{UP + 1} = \frac{1\,600 - 1\,300}{4 + 1} = 60.$$

Teoretická cena předkupního práva před ex-datem činí 60 Kč.

Teoretickou cenu předkupního práva po ex-datu stanovíme podle vzorce (16-7):

$$CPP = \frac{PC_{EX} - UC}{UP} = \frac{1\,550 - 1\,300}{4} = 62{,}50.$$

Teoretická cena předkupního práva po ex-datu činí 62,50 Kč.

16.2.2 Cena předkupního práva při vyloučení dividendového nároku mladých akcií

S mladými akciemi je spojeno i právo na dividendu ze zisku dosaženého v roce, v němž došlo ke zvýšení základního kapitálu. Stanovy akciové společnosti však mohou stanovit, že mladé akcie v roce své emise nemají dividendové oprávnění, to znamená, že z nich neplyne majiteli dividenda ze zisku. Tato nevýhoda se samozřejmě projeví v ceně předkupního práva tak, že snižují jeho výši. Vzorce (16-15) a (16-17) pro cenu předkupního práva potom mají pro cenu **před ex-datem** tvar:

$$CPP = \frac{PC_{PP} - UC - D}{UP + 1}, \qquad \textbf{(16-18)}$$

resp. pro cenu **po ex-datu** tvar:

$$CPP = \frac{PC_{EX} - UC - D}{UP}, \qquad \textbf{(16-19)}$$

kde CPP je cena předkupního práva;
PC_{PP} je promptní cena akcie s předkupním právem;
PC_{EX} je promptní cena akcie bez předkupního práva;
UC je upisovací cena;
UP je upisovací poměr;
D je výše dividendy v daném roce.

16.2.3 Využití předkupního práva bez potřeby dodatečného kapitálu

Majitel akcií, na které připadá nárok na předkupní právo k nákupu mladých akcií, nemusí mít zájem investovat další kapitál do nákupu mladých akcií. Na druhé straně by bylo škoda, aby nechal předkupní práva propadnout. Zde se nabízí zajímavá možnost část předkupních práv prodat a výtěžek z jejich prodeje využít k nákupu mladých akcií prostřednictvím zbylých předkupních práv. Otázkou je, kolik předkupních práv musí prodat, aby výtěžek z prodeje přesně stačil na využití všech zbylých předkupních práv.

Při odvozování počtu předkupních práv, jež musí akcionář prodat, vyjdeme z toho, že výtěžek z prodeje se musí právě rovnat celkové ceně mladých akcií, které v počtu odpovídajícímu zbylým předkupním právům akcionář zakoupí. Musí tedy platit následující rovnice:

$$CPP \cdot x = \frac{k - x}{UP} \cdot UC, \qquad \textbf{(16-20)}$$

kde CPP je cena předkupního práva;
k je celkový počet získaných předkupních práv;

x je počet předkupních práv, která musí prodat;
UC je upisovací cena;
UP je upisovací poměr.

Levá strana vyjadřuje výtěžek z prodeje části předkupních práv, pravá strana potom celkovou cenu za mladé akcie, které v počtu zbylých předkupních práv zakoupíme.

Úpravou rovnice vyjádříme počet předkupních práv, která musíme prodat:

$$x = \frac{k \cdot UC}{CPP \cdot UP + UC}, \qquad \textbf{(16-21)}$$

kde CPP je cena předkupního práva;
k je celkový počet získaných předkupních práv;
x je počet předkupních práv, která musí prodat;
UC je upisovací cena;
UP je upisovací poměr.

Počet prodávaných předkupních práv musí být vždy celé číslo, proto se výsledný počet předkupních práv podle vztahu (16-21) musí (podle okolností směrem nahoru či dolů) zaokrouhlit na celá čísla[55].

Pokud počet zbylých předkupních práv vydělíme upisovacím poměrem, můžeme zjistit, kolik mladých akcií se uvedenou transakcí získá:

$$y = \frac{k - x}{UP}, \qquad \textbf{(16-22)}$$

kde y je počet získaných mladých akcií;
k je celkový počet získaných předkupních práv;
UP je upisovací poměr.

55 Přesný počet prodávaných předkupních práv se upraví tak, aby počet ponechaných práv ($k - x$) byl dělitelný upisovacím právem. Pokud nechceme vkládat další finanční prostředky, musí se z výpočtu vyplývající počet ponechaných práv upravit směrem dolů na nejbližší násobek upisovacího poměru. Tomu odpovídajícím způsobem se potom upraví i počet prodávaných předkupních práv.

Příklad 16-3 *Využití předkupních práv bez vkladu nového kapitálu*

Akcionář vlastní sto akcií firmy, která provádí zvýšení základního kapitálu emisí mladých akcií, jak bylo popsáno v příkladu 16-2. Chce využít získaná předkupní práva bez dodatečného vkladu nového kapitálu. Určete, kolik tento akcionář musí prodat získaných předkupních práv, aby získal maximální počet mladých akcií, aniž by vkládal další kapitál.

Řešení

Počet předkupních práv, která musí akcionář prodat, podle vzorce (16-21) činí:

$$x = \frac{k \cdot UC}{CPP \cdot UP + UC} = \frac{100 \cdot 1\,300}{62{,}50 \cdot 4 + 1\,300} = 83{,}87 \approx 84.$$

Akcionář musí prodat 84 předkupních práv. Z výtěžku 5 250 Kč (= 84 · 62,50) získá realizací zbylých předkupních práv mladé akcie, jejichž počet určíme podle vzorce (16-22):

$$y = \frac{k - x}{UP} = \frac{100 - 84}{4} = 4.$$

Za zakoupení čtyř mladých akcií prostřednictvím předkupních práv zaplatí akcionář celkem 5 200 Kč (čtyři akcie za upisovací cenu 1 300 Kč)[56].

16.3 Výnos z akcií a jeho měření

Finanční investice do akcií mohou přinášet investorům výnosy ve třech formách:

- **dividendy** jako podíl na zisku společnosti;
- **kapitálový výnos,** plynoucí ze zvýšení ceny akcie během doby její držby;
- příjmy plynoucí z prodeje či **realizace předkupních práv**[57].

---

[56] Malý rozdíl mezi výtěžkem z prodeje předkupních práv a celkovou cenou zaplacenou za zakoupené mladé akcie je způsoben zaokrouhlením počtu prodaných předkupních práv na celé číslo.

[57] Zde je třeba upozornit, že se nejedná o jakýsi výnos navíc, obvykle totiž o hodnotu předkupního práva klesá cena akcie. Nicméně z hlediska formy se jedná o výnos odlišný od předchozích dvou.

Nejjednodušším ukazatelem vyjadřujícím výnosnost investování do akcie za dobu její držby je tzv. **běžná výnosnost akcie,** která je definována jako následující poměr:

$$r_B = \frac{D}{P_0}, \tag{16-23}$$

kde r_B je běžná výnosnost akcie;
D je dividenda na jednu akcii;
P_0 je tržní cena akcie, za kterou byla zakoupena.

Problémem tohoto ukazatele je, že v sobě zahrnuje pouze výnos, plynoucí z vyplacených dividend, nikoliv však kapitálový výnos. Proto je přesnější a častěji užívaná **celková výnosnost** investice do akcií, která je definována jako:

$$r_C = \frac{(P_1 - P_0) + D}{P_0}, \tag{16-24}$$

kde r_C je celková výnosnost akcie;
D je dividenda na jednu akcii;
P_1 je tržní cena akcie, za kterou byla prodána;
P_0 je tržní cena akcie, za kterou byla zakoupena.

V případě, že během držby akcie připadne na akcii nárok na předkupní právo, potom výnos z prodeje tohoto práva je součástí výnosů investora a vzorec pro celkovou výnosnost můžeme zapsat ve tvaru:

$$r_C = \frac{(P_1 - P_0) + D + CPP}{P_0}, \tag{16-25}$$

kde r_C je celková výnosnost akcie;
D je dividenda na jednu akcii;
CPP je cena předkupního práva, připadajícího na akcii během její držby;
P_1 je tržní cena akcie, za kterou byla prodána;
P_0 je tržní cena akcie, za kterou byla zakoupena.

Vzhledem k tomu, že situace, kdy jsou vydávána předkupní práva, nebývá příliš častá, nebudeme je v dalších úvahách o výnosnosti uvažovat.

Vzorec (16-24) měří celkovou výnosnost za dobu držby akcie. Pro srovnání s jinými investicemi je často zapotřebí přepočítat výnosnost na stejný časový úsek, standardně se uvažuje roční období. **Celkovou výnosnost na roční bázi** můžeme vyjádřit v zásadě dvojím způsobem:

1. S **využitím jednoduchého úročení** můžeme vyjádřit celkovou výnosnost jako:

$$r_{Cp.a.} = \frac{(P_1 - P_0) + D}{P_0 \cdot n}, \tag{16-26}$$

kde $r_{Cp.a.}$ je celková výnosnost na roční bázi;
D je dividenda na jednu akcii;
P_1 je tržní cena akcie, za kterou byla prodána;
P_0 je tržní cena akcie, za kterou byla zakoupena;
n je doba držby akcie v letech.

Logika přepočtu celkové výnosnosti dané investice do akcie na roční bázi vychází jakoby z toho, že danou investiční možnost můžeme za zcela shodných podmínek opakovat během celého roku. To znamená, že vždy při ukončení investice (prodeji akcie) máme okamžitě možnost realizovat další investici za **zcela shodných** podmínek[58].

V případě přepočtu pomocí jednoduchého úročení potom vycházíme z toho, že znovu investujeme stále tutéž částku (P_0), výnosy ($P_1 - P_0 + D$) nejsou znovu investovány.

2. S **využitím složeného úročení** můžeme vyjádřit celkovou výnosnost na roční bázi jako:

$$r_{Cp.a.} = \sqrt[n]{\frac{P_1 + D}{P_0}} - 1, \tag{16-27}$$

kde $r_{Cp.a.}$ je celková výnosnost na roční bázi;
D je dividenda na jednu akcii;
P_1 je tržní cena akcie, za kterou byla prodána;

[58] Jde samozřejmě o teoretickou možnost, protože prakticky tyto podmínky nelze ve většině případů splnit, nicméně aby na roční bázi přepočtená výnosnost odrážela výnosnost dané investice, musíme během roku vycházet z možnosti jejího opakování.

P_0 je tržní cena akcie, za kterou byla zakoupena;
n je doba držby akcie v letech.

Přepočet je opět založen na předpokladu možnosti opakování shodné investice. Na rozdíl od jednoduchého úročení při přepočtu pomocí složeného úročení vycházíme z toho, že celý kapitál, který se nám vrací vždy zpět ($P_1 + D$), okamžitě použijeme na zcela shodnou investici. To znamená, že okamžitě znovu investujeme i výnosy.

Příklad 16-4 *Výpočet výnosnosti investice do akcií*

Předpokládejte, že jste koupili akcii v nominální hodnotě 1 000 Kč za cenu 1 200 Kč, po jednom měsíci jste ji prodali za 1 400 Kč, během této doby jste navíc obdrželi 10% dividendu. Jaká byla celková výnosnost této investice?

Celkovou investici za měsíc držby určíme podle vzorce (16-24) jako:

$$r_C = \frac{(P_1 - P_0) + D}{P_0} = \frac{(1\,400 - 1\,200) + 100}{1\,200} = 0{,}25 = 25\ \%.$$

Pokud bychom chtěli znát celkovou výnosnost na roční bázi, potom v případě přepočtu na základě jednoduchého úročení podle vzorce (16-26) dostaneme:

$$r_{Cp.a.} = \frac{(P_1 - P_0) + D}{P_0 \cdot n} = \frac{(1\,400 - 1\,200) + 100}{1\,200 \cdot 1/12} = 3{,}0 = 300\ \%,$$

v případě přepočtu založeného na složeném úročení podle vzorce (16-27) dostaneme:

$$r_{Cp.a.} = \sqrt[n]{\frac{P_1 + D}{P_0}} - 1 = \sqrt[1/12]{\frac{1\,400 + 100}{1\,200}} - 1 = 13{,}55 = 1\,355\ \%.$$

Doposud uvedené vzorce pro výpočet výnosnosti neuvažují jeden důležitý faktor, kterým je **zdanění,** neboli jedná se o hrubou výnosnost. Investora ovšem zajímá, jaký je konečný efekt plynoucí z investice, to znamená **čistá výnosnost,** která v sobě zohledňuje i vliv zdanění výnosu, plynoucího z investice do akcií.

Podle platného zákona o dani z příjmu podléhají u nás výnosy z akcií následujícímu zdanění:

- **dividendy** jsou daněny shodně jako úrokové výnosy z dluhopisů, to znamená:[59]
  - pro **fyzické osoby** se na tyto výnosy vztahuje srážková daň se zvláštní sazbou daně ve výši 15 %, kterou sráží a odvádí přímo emitent při výplatě dividend; tyto příjmy potom nejsou součástí příjmů, vcházejících do daňového přiznání;
  - **fyzickým osobám – podnikatelům, pokud je vklad zahrnut v jejich obchodním majetku, a právnickým osobám** vcházejí dividendové příjmy do daňového základu;
- **kapitálové výnosy,** plynoucí z rozdílu mezi prodejní a kupní cenou akcie, patří mezi ostatní příjmy a vcházejí do celkového daňového základu investora s výjimkou případu, kdy doba od zakoupení do prodeje přesáhne dobu šesti měsíců, potom jsou pro fyzické osoby od daně osvobozeny;
- **příjmy z prodeje předkupního práva** patří mezi kapitálové výnosy investora a vcházejí do celkového daňového základu investora.

Pokud promítneme zdanění do vzorce (16-25) celkové výnosnosti, dostaneme vzorec pro výpočet **čisté celkové výnosnosti** investice do akcie:

1. v případě, že doba od zakoupení do prodeje nepřesáhne dobu šesti měsíců:

$$r_{\check{C}C} = \frac{(P_1 - P_0)\cdot(1-d) + D\cdot(1-0{,}15) + CPP\cdot(1-d)}{P_0}; \qquad \textbf{(16-28)}$$

2. v případě, že doba od zakoupení do prodeje přesáhne dobu šesti měsíců (pro fyzické osoby):

$$r_{\check{C}C} = \frac{(P_1 - P_0) + D\cdot(1-0{,}15) + CPP\cdot(1-d)}{P_0}, \qquad \textbf{(16-29)}$$

[59] Od roku 2015 budou příjmy z dividend od daně z příjmu osvobozeny.

kde $r_{ČC}$ je celková čistá výnosnost akcie;

D je dividenda na jednu akcii;

CPP je cena předkupního práva, připadajícího na akcii během její držby;

P_1 je tržní cena akcie, za kterou byla prodána;

P_0 je tržní cena akcie, za kterou byla zakoupena;

d je mezní daňová sazba, tj. sazba nejvyššího daňového pásma, kam spadá poslední část dani podléhajících příjmů investora.

Zdanění lze samozřejmě analogicky promítnout i do vzorců (16-26) a (16-27), vyjadřujících celkovou výnosnost na roční bázi.

17. Měnový kurz a devizové obchody

Měnový kurz je z kvantitativního hlediska poměr, v jakém se směňují dvě navzájem cizí měny, neboli cena jedné měny vyjádřená v jiné měně. Výše měnového kurzu je primárně determinována kurzovým systémem, jaký je v dané zemi uplatňován. U volně směnitelných měn je kurz určován na základě nabídky a poptávky po dané měně, často je však i v tomto případě pohyb kurzu udržován v určitém pásmu na základě dobrovolných či závazných intervencí centrální banky.

Měnový kurz se rozlišuje podle dvou forem peněz na:

- **devizový kurz,** který je cenou deviz, tj. bezhotovostních cizích peněz ve formě zůstatků na bankovních účtech nebo směnek, šeků apod.;
- **valutový kurz,** který je cenou valut, to znamená hotovostních cizích peněz ve formě bankovek a mincí.

Měnový kurz můžeme rozlišovat i z hlediska lhůty, ve které dochází k realizaci obchodu na základě daného kurzu na:

- **promptní (spotový) kurz,** který se týká obchodů vypořádaných do dvou obchodních dnů po jejich sjednání;
- **termínový kurz,** který se naproti tomu vztahuje k obchodům sjednaným dnes, jejichž plnění však nastává až ve stanoveném termínu v budoucnosti (tj. později než během dvou obchodních dnů).

I když některé věci jsou společné jak pro promptní, tak pro termínové kurzy, v této kapitole se budeme věnovat výhradně promptním kurzům, o termínových kurzech bude pojednáno v sedmnácté kapitole.

17.1 Způsob kotace měnových kurzů

Banky a další subjekty, které provádějí obchody s cizími měnami, musejí měnové kurzy stanovit, tzv. kotovat, v určité formě. V praxi se můžeme setkat se dvojím způsobem kotace:

- při **přímé kotaci** se vyjadřuje počet jednotek domácí měny za jednotku cizí měny – např. kurz koruny k americkému dolaru je kotován jako 22,328 CZK/USD[60] a znamená, že jeden americký dolar se rovná 22,328 Kč; přímá kotace je obvyklý způsob uvádění měnových kurzů;

- při **nepřímé kotaci** se naopak vyjadřuje počet jednotek cizí měny za jednotku měny domácí. Potom záznam 1,456 USD/GBP znamená, že jedna libra se rovná 1,456 amerických dolarů. Nepřímý způsob kotace cizích měn se tradičně používá např. ve Velké Británii.

Při kotaci kurzu banky uvádějí pro každou měnu dva kurzy – kurz nákup a kurz prodej. **Kurz nákup** (*bid*) je kurz, za který je banka danou kotovanou měnu ochotna koupit, **kurz prodej** (*ask*, *offer*) je naproti tomu kurz, za který je banka ochotna danou měnu prodat. Rozdíl mezi oběma kurzy – tzv. *spread* – se liší u jednotlivých měn (méně obvyklé, rizikovější měny mají vyšší *spread*) i podle typu obchodu (u valut je *spread* vyšší než u deviz, pro větší obchody je nižší). Aritmetický průměr mezi kurzem nákup a prodej představuje **kurz střed.**

V případě, že budeme chtít cizí měnu směnit do měny tuzemské, uplatní banka pro tuto směnu kurz nákup. Výši částky, kterou od banky obdržíme (abstrahujeme-li od provize a poplatků účtovaných bankou), potom můžeme vyjádřit jako:

$$K_{dom} = K_{cizí} \cdot PK, \tag{17-1}$$

kde K_{dom} je částka v domácí měně;
$K_{cizí}$ je směňovaná částka v cizí měně;
PK je promptní měnový kurz, vyjádřený přímou kotací.

Pokud naopak budeme chtít za domácí měnu zakoupit měnu cizí, použije banka kurz prodej. Částku, kterou za směňovaný obnos v domácí měně obdržíme v měně cizí, můžeme určit jako:

$$K_{cizí} = \frac{K_{dom}}{PK}, \tag{17-2}$$

60 Z formálně logického hlediska je správné při vyjadřování kurzu uvádět na prvém místě měnu, ve které je kurz uveden (kurz CZK/USD vyjadřuje kurz dolaru v korunách). Tohoto způsobu se budeme držet. Často se však setkáme i s opačným zápisem (USD/CZK).

kde K_{dom} je částka v domácí měně,
$K_{cizí}$ je směňovaná částka v cizí měně,
PK je promptní měnový kurz, vyjádřený přímou kotací.

17.2 Křížové kurzy

Z kotovaných kurzů domácí měny k jednotlivým cizím měnám můžeme určit vzájemné kurzy těchto cizích měn, označované jako křížové kurzy (*cross rates*). Pokud máme např. kotovaný kurz měny A k měnám B a C, můžeme z nich odvodit kurz měny B a C podle vztahu:

$$PK_{C/B} = \frac{PK_{A/B}}{PK_{A/C}}, \tag{17-3}$$

kde $PK_{C/B}$ je kurz měny C k měně B;
$PK_{A/B}$ je kurz měny A k měně B;
$PK_{A/C}$ je kurz měny A k měně C.

Pro lepší pochopení si logiku odvození křížového kurzu ukážeme na schematickém příkladu. Předpokládejme, že máme kotován kurz koruny k euru a americkému dolaru:

$PK_{A/B} = 22{,}328$ CZK/USD;
$PK_{A/C} = 29{,}550$ CZK/EUR.

Znamená to, že 1 dolar = 22,328 korun a 1 euro = 29,550 korun. Máme-li nyní určit kurz $PK_{C/B}$, tj. $PK_{EUR/USD}$, neboli kolik eur se rovná jednomu dolaru, vyjdeme ze vztahů, vyplývajících z kotovaných kurzů, které uspořádáme do následující tabulky:

Částka v korunách	**Tomu odpovídá částka v eurech**	**Tomu odpovídá částka v dolarech**
29,550	1	–
22,328	$? = PK_{EUR/USD}$	1

Z tabulky potom vyplývá, že částku v eurech, odpovídající 22,328 korunám a současně i jednomu dolaru, to znamená kurz $PK_{EUR/USD}$, neboli v obecném vyjádření $PK_{C/B}$, můžeme vyjádřit jako:

$$PK_{C/B} = PK_{EUR/USD} = \frac{22{,}328}{29{,}550} = 0{,}756 = \frac{PK_{CZK/USD}}{PK_{CZK/EUR}} = \frac{PK_{A/B}}{PK_{A/C}}, \qquad \textbf{(17-4)}$$

kde $PK_{C/B}$ je kurz měny C k měně B, v našem případě kurz eura k dolaru;

$PK_{A/B}$ je kurz měny A k měně B, v našem případě kurz koruny k dolaru;

$PK_{A/C}$ je kurz měny A k měně C, v našem případě kurz koruny k euru.

Pokud je na trhu přímo kotován kurz měny $PK_{C/B}$, měl by být přibližně shodný s křížovým kurzem. Kdyby tomu tak nebylo, bylo by možné provádět třístrannou arbitráž[61]. Předpokládejme, že např. určitý subjekt na trhu kotuje kurz EUR/USD 0,766. Potom by bylo možné provádět následující arbitráž (abstrahujeme od všech dalších nákladů):

Druh transakce	–	směna koruny → dolary	směna dolary → eura	směna eura → koruny
Výše kapitálu	1 000 korun	44,787	34,307	1 013,772

Z tabulky je patrné, že při daném kurzu $PK_{EUR/USD}$ = 0,766 by bylo možné uvedenými transakcemi dosahovat bezrizikového zisku.

Dosud jsme pracovali pouze s jedním křížovým kurzem, který můžeme označit jako **křížový kurz střed.** I křížové kurzy však mohou být stanoveny jako kurzy nákup a prodej. Křížové kurzy nákup a prodej můžeme odvodit následujícím způsobem.

Předpokládejme, že na trhu jsou bankami BETA a GAMA kotovány následující kurzy:

$PK_{A/B} = PK_{CZK/USD} = 21{,}904 – 22{,}752$ CZK/USD,

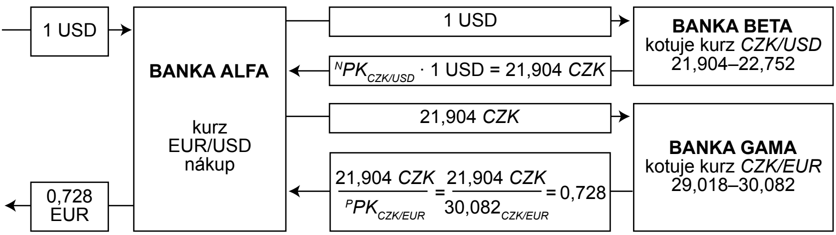
$PK_{A/C} = PK_{CZK/EUR} = 29{,}018 – 30{,}082$ CZK/EUR.

[61] Arbitráž je druh finanční operace, při níž subjekt, který ji provádí, dosahuje při jakémkoliv tržním vývoji jistého zisku.

Pokud chce např. banka ALFA odvodit křížový kurz nákup $PK_{B/C}$, v našem případě $PK_{EUR/USD}$, znamená to, že odvozuje kurz pro případ, kdy bude nakupovat měnu B (USD) za měnu C (EUR) a musí stanovit, kolik eur vyplatí za jeden dolar. Může vycházet z následujících transakcí:

1. získané dolary prodá bance BETA za koruny – banka BETA odkupuje dolary, uplatní se tedy kurz nákup;
2. za získané koruny koupí banka ALFA u banky GAMA eura – z hlediska banky GAMA se jedná o prodej eur, uplatní se tedy kurz prodej.

Pokud celou transakci zahájíme s jedním dolarem, můžeme ji schematicky znázornit na obr. 17.1.



Obrázek 17.1 Odvození křížových kurzů

Z uvedeného schématu můžeme snadno odvodit, kolik eur banka vyplatí za jeden dolar, neboli **křížový kurz nákup** EUR/USD, pro který musí platit:

$$^{N}PK_{EUR/USD} = \frac{^{N}PK_{CZK/USD}}{^{P}PK_{CZK/EUR}}, \tag{17-5}$$

kde $^{N}PK_{EUR/USD}$ je kurz EUR/USD nákup;
$^{N}PK_{CZK/USD}$ je kurz CZK/USD nákup;
$^{P}PK_{CZK/EUR}$ je kurz CZK/EUR prodej.

Obecně potom můžeme zapsat křížový kurz nákup jako:

$$^{N}PK_{C/B} = \frac{^{N}PK_{A/B}}{^{P}PK_{A/C}}, \tag{17-6}$$

kde $^{N}PK_{C/B}$ je kurz nákup měny C k měně B;
$^{N}PK_{A/B}$ je kurz nákup měny A k měně B;
$^{P}PK_{A/C}$ je kurz prodej měny A k měně C.

Podle analogického postupu bychom mohli odvodit i **křížový kurz prodej,** pro který platí výsledný vztah:

$$^{P}PK_{C/B} = \frac{^{P}PK_{A/B}}{^{N}PK_{A/C}}, \qquad \textbf{(17-7)}$$

kde $^{P}PK_{C/B}$ je kurz prodej měny C k měně B;
$^{P}PK_{A/B}$ je kurz prodej měny A k měně B;
$^{N}PK_{A/C}$ je kurz nákup měny A k měně C.

18. Finanční termínové obchody

Doposud jsme se zabývali různými finančními obchody, které měly jeden společný znak: termín sjednání obchodu a termín jeho vypořádání se shodoval, popř. se lišil jen o několik málo dnů. Všechny tyto obchody se označují jako **promptní (spotové).**

Vedle těchto obchodů existují i **obchody termínové,** pro které je charakteristické, že obchod se všemi podmínkami je sjednán dnes, jeho vypořádání je ovšem posunuto do budoucnosti. To znamená, že smluvní strany si sjednají pevné podmínky pro obchod, který bude realizován později. Během této doby nemůže žádná ze smluvních stran měnit sjednané podmínky obchodu, mohou se však – a zpravidla tomu tak je – měnit podmínky na trhu.

Jednou z nejdůležitějších podmínek každého obchodu je cena. Nejinak je tomu i u termínových obchodů. I zde je cena v konečné podobě dána stavem poptávky a nabídky na trhu, ale můžeme i v tomto případě odvodit její teoretický základ.

Motivy, které vedou jednotlivé subjekty k sjednávání termínových obchodů, můžeme rozdělit do tří skupin:

- **zajištění** neboli *hedging* je zjednodušeně řečeno založeno na tom, že pomocí termínového obchodu si můžeme zajistit pevnou cenu pro nějaký obchod v budoucnosti již dnes, takže změny cen na trhu do doby realizace obchodu nás již neovlivní;
- **spekulace** spočívá naproti tomu v tom, že spekulant sjednává termínový obchod s tím, že v době jeho realizace budou na trhu takové podmínky, které mu umožní dosáhnout zisku (např. sjedná termínový obchod na prodej určitého cenného papíru za cenu 1 000 Kč a očekává, že v době realizace tohoto obchodu se mu podaří pro plnění termínového obchodu tento cenný papír koupit na trhu za cenu nižší než 1 000 Kč);
- **arbitráž** je založena na využití cenových nesouladů mezi jednotlivými termínovými trhy či mezi instrumenty na promptním a termínovém trhu. Arbitražér zjednodušeně řečeno nakupuje podhodnocené instrumenty a současně prodává nadhodnocené. Z cenových diferencí mu potom plyne bezrizikový zisk.

Termínové obchody mohou být sjednávány na řadu různých instrumentů. Z finančních instrumentů, kterým se budeme v této publikaci výhradně věnovat, se může v obecné rovině jednat o následující:

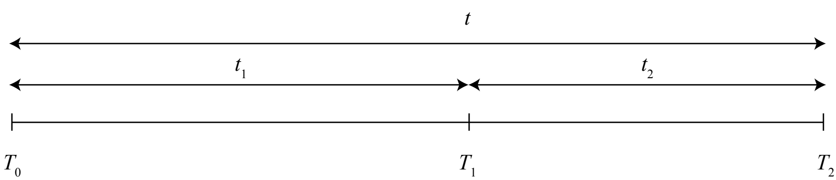
- úvěr či depozitum spojené s určitou úrokovou sazbou;
- cenný papír, ať již ve formě dluhopisu či akcie;
- cizí měna.

Termínové ceny potom u těchto instrumentů nabývají formy termínové úrokové sazby, termínové ceny (kurzu) cenného papíru a termínového měnového kurzu. Vzhledem k zaměření této publikace se budeme nejprve věnovat obecně odvození těchto tří druhů termínových cen, poté se krátce zastavíme i u charakteristik konkrétních typů termínových finančních obchodů, které se v praxi objevují.

18.1 Termínová úroková sazba

Termínová úroková sazba je sazba sjednaná mezi dvěma subjekty pro budoucí úvěr či depozitum. Teoretickou výši termínové úrokové sazby můžeme odvodit na základě srovnání dvou investičních variant.

Předpokládejme, že chceme dnes, to je v okamžiku T_0, určit termínovou úrokovou sazbu pro budoucí období t_2, to je od T_1 do T_2. Pro názornost si můžeme uvedené termíny schematicky znázornit na obr. 18.1.



Obrázek 18.1 Označení termínů a období

Při odvozování termínové úrokové sazby předpokládejme, že ten, kdo by chtěl uložit peníze (resp. si půjčit) na celé období t, to je od T_0 do T_2, má v zásadě dvě možnosti:

1. uložit (vypůjčit) peníze najednou na celé období t za úrokovou sazbu p, nebo

2. uložit (vypůjčit) peníze nadvakrát, to znamená na období t_1 za úrokovou sazbu p_1, a poté na období t_2 za úrokovou sazbu p_2 (sjednanou v T_0).

Za předpokladu, že úvěrové riziko[62] spojené s oběma variantami bude shodné, potom by obě varianty měly přinášet shodný výsledek, neboli pokud uložíme (resp. si vypůjčíme) na počátku v T_0 stejný kapitál, potom se nám musí na konci této doby v T_2 vrátit (resp. musíme vrátit) u obou variant kapitál ve shodné výši. Kdyby tomu tak nebylo a jedna varianta by byla výhodnější, existovala by možnost prostřednictvím arbitráže dosahovat bezrizikového zisku[63]. A právě možnost, popř. provádění těchto arbitráží udržuje stejnou výhodnost obou variant.

Konečný kapitál v T_2 u varianty A můžeme vyjádřit[64] jako:

$$ {}^{A}K_{T_2} = K_{T_0} \cdot (1 + \frac{p \cdot t}{36\,000}), \qquad \textbf{(18-1)} $$

kde ${}^{A}K_{T_2}$ je konečný kapitál v čase T_2 u varianty A;
K_{T_0} je počáteční kapitál v T_0;
p je úroková sazba v % p.a., vztahující se k období t;
t je období od T_0 do T_2 ve dnech.

Při výpočtu konečného kapitálu u varianty B musíme pamatovat na to, že v tomto případě se nám vrací zúročený kapitál již v čase T_1 (jeho výši udává výraz v hranaté závorce ve vzorci (18-2), a proto pro období t_2 ukládáme již tento zúročený kapitál. Konečný kapitál v T_2 u varianty B potom můžeme vyjádřit jako:

$$ {}^{B}K_{T_2} = \left[K_{T_0} \cdot (1 + \frac{p_1 \cdot t_1}{36\,000}) \right] \cdot (1 + \frac{p_2 \cdot t_2}{36\,000}), \qquad \textbf{(18-2)} $$

---

62 Pod úvěrovým rizikem rozumíme riziko, že některá ze smluvních stran nedodrží sjednané podmínky (např. nesplatí úvěr, nezaplatí úrok apod.).

63 Jak by taková arbitráž mohla vypadat? Kdyby např. varianta B byla výhodnější, potom by bylo výhodné vypůjčit si kapitál na celé období t (to znamená vstoupit do varianty A v pozici dlužníka) a vypůjčený kapitál investovat do varianty B v pozici věřitele (samozřejmě že nepočítáme se žádnými transakčními náklady a zatím pracujeme jen s jednou úrokovou sazbou střed, neuvažujeme tedy *spread* mezi sazbami nákup a prodej).

64 Zde se standardně vychází z jednoduchého úročení.

kde ${}^{B}K_{T_2}$ je konečný kapitál v čase T_2 u varianty B;
K_{T_0} je počáteční kapitál v T_0;
p_1 je úroková sazba v % p.a., vztahující se k období t_1;
t_1 je období od T_0 do T_1 ve dnech;
p_2 je úroková sazba v % p.a. vztahující se k období t_2;
t_2 je období od T_1 do T_2 ve dnech.

Jak jsme již uvedli, obě varianty musejí přinášet shodný výsledek, neboli při shodném počátečním kapitálu K_{T_0} musí být i konečný kapitál u obou variant shodný. To znamená, že musí platit:

$$K_{T_0} \cdot (1 + \frac{p \cdot t}{36\,000}) = \left[K_{T_0} \cdot (1 + \frac{p_1 \cdot t_1}{36\,000}) \right] \cdot (1 + \frac{p_2 \cdot t_2}{36\,000}). \qquad \textbf{(18-3)}$$

Úpravou rovnice potom pro úrokovou sazbu p_2 – termínovou úrokovou sazbu pro období t_2 – dostaneme:

$$p_2 = \frac{\left[(p \cdot t) - (p_1 \cdot t_1) \right] \cdot 36\,000}{\left[36\,000 + (p_1 \cdot t_1) \right] \cdot t_2}, \qquad \textbf{(18-4)}$$

kde p_1 je úroková sazba v % p.a., vztahující se k období t_1;
t_1 je období od T_0 do T_1 ve dnech;
p_2 je úroková sazba v % p.a., vztahující se k období t_2;
t_2 je období od T_1 do T_2 ve dnech;
p je úroková sazba v % p.a., vztahující se k období t;
t je období od T_0 do T_2 ve dnech.

Při propočtu termínových úrokových sazeb se standardně pracuje s úrokovými sazbami střed, proto je i výsledná termínová úroková sazba sazbou střed. I termínové úrokové sazby existují jako sazby nákup–prodej. Ty potom dostaneme úpravou sazby střed o určitý *spread*.

Příklad 18-1 *Výpočet termínové úrokové sazby*

Vypočtěte termínovou úrokovou sazbu pro tříměsíční období, začínající za tři měsíce, pokud je aktuální situace na korunovém trhu charakterizována následujícími údaji:

- tříměsíční úroková sazba: 3,18–3,46 % p.a.;
- šestiměsíční úroková sazba: 3,62–3,92 % p.a.

Řešení

Termínovou úrokovou sazbu střed stanovíme dosazením do vzorce (18-4). Spotové sazby střed určíme jako aritmetický průměr sazeb nákup a prodej, to znamená p_1 = 3,32 %; p = 3,77 %:

$$p_2 = \frac{\left[(p \cdot t) - (p_1 \cdot t_1)\right] \cdot 36\,000}{\left[36\,000 + (p_1 \cdot t_1)\right] \cdot t_2} = \frac{\left[(3{,}77 \cdot 180) - (3{,}32 \cdot 90)\right] \cdot 36\,000}{\left[36\,000 + (3{,}32 \cdot 90)\right] \cdot 90} = 4{,}18.$$

Termínová úroková sazba střed činí 4,18 % p.a.

18.2 Termínová cena cenného papíru

Při odvozování termínové ceny (kurzu) cenného papíru můžeme vyjít z podobné úvahy, jako tomu bylo u termínové úrokové sazby.

Opět můžeme předpokládat, že máme určitý kapitál, který chceme investovat na určité období od T_0 do T_1, přičemž chceme dnes pevně stanovit výsledný výnos.

Uvažujme zase dvě možnosti pro naši investici:

1. uložení peněz na depozitum v bance, které se nám zhodnotí o příslušný úrok;
2. zakoupení cenného papíru v čase T_0 za promptní cenu, současně sjednání termínového obchodu na prodej daného cenného papíru k termínu T_1 za pevně sjednanou termínovou cenu. Během doby držby cenného papíru můžeme z něj inkasovat výnosy ve formě dividend či úroků.

Pokud budeme opět předpokládat shodné úvěrové riziko u obou variant, musejí přinášet k T_1 shodný konečný kapitál, resp. shodný výnos (výše investovaného kapitálu v čase T_0 je v obou případech stejná).

Výše konečného kapitálu u varianty A je dána počátečním kapitálem plus úrok, u varianty B potom jako termínová cena (za kterou daný cenný papír v T_1 prodáme) plus výnosy plynoucí z cenného papíru během jeho držby. Musí tedy platit:

$$P \cdot \left(1 + \frac{p \cdot t}{36\,000}\right) = FP + V, \qquad \textbf{(18-5)}$$

kde P je promptní cena cenného papíru v čase T_0 (neboli výše kapitálu, který máme na počátku v T_0 k dispozici);
V jsou výnosy z cenného papíru během jeho držby;
p je úroková sazba (vyjádřená v % p.a), za kterou můžeme uložit prostředky na dobu od T_0 do T_1;
t je délka období od T_0 do T_1 ve dnech;
FP je termínová cena, stanovená v T_0 pro obchod s realizací v čase T_1.

Pro **termínovou cenu** potom úpravou rovnice dostaneme:

$$FP = P \cdot (1 + \frac{p \cdot t}{36\,000}) - V. \tag{18-6}$$

Příklad 18-2 *Výpočet termínové ceny cenného papíru*

Stanovte termínovou cenu akcie k termínu za šest měsíců, pokud je aktuální promptní cena 1 000 Kč a šestiměsíční úroková sazba činí 4 % p.a. Během této doby, předpokládejme v termínu realizace obchodu (T_1), bude vyplacena na jednu akcii čistá dividenda ve výši 100 Kč.

Řešení

Termínovou cenu vypočteme dosazením do vzorce (18-6), kde bude P = 1 000 Kč; p = 4 %; V = 100 Kč:

$$FP = P \cdot \left(1 + \frac{p \cdot t}{36\,000}\right) - V = 1\,000 \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot 180}{36\,000}\right) - 100 = 920.$$

Termínová cena akcie činí 920 Kč.

18.3 Termínový měnový kurz

Při odvozování termínového měnového kurzu můžeme vyjít ze shodné úvahy jako v případě termínové ceny cenného papíru. Dejme tomu, že chceme určit termínový měnový kurz koruny k americkému dolaru k termínu T_1.

Budeme tedy analogicky předpokládat, že v čase T_0 máme určitý kapitál v korunách, který můžeme investovat opět dvojím způsobem:

1. uložení peněz jako korunové depozitum v bance, které se nám zhodnotí o příslušný úrok;
2. směna korun do dolarů v čase T_0 za promptní kurz, uložení jako dolarového depozita a současně sjednání termínového obchodu na prodej dolarů za koruny k termínu T_1 za pevně sjednaný termínový kurz.

Vzhledem k tomu, že obě varianty vyžadují na počátku v T_0 shodnou výši kapitálu, musejí být (při shodné rizikovosti obou variant) shodné opět i výsledky, které přinášejí.

Výsledek první varianty můžeme vyjádřit jako:

$$K_{T1} = K_{T0} \cdot (1 + \frac{p_{CZK} \cdot t}{36\,000}). \tag{18-7}$$

Výsledek druhé varianty potom vyjádříme jako:

$$K_{T1} = \frac{K_{T0}}{PK_{CZK/USD}} \cdot (1 + \frac{p_{USD} \cdot t}{36\,000}) \cdot TK_{CZK/USD}, \tag{18-8}$$

kde
K_{T_1} je konečný kapitál v T_1 v korunách;
K_{T_0} je počáteční kapitál v T_0 v korunách;
$PK_{CZK/USD}$ je promptní kurz CZK/USD v čase T_0;
$TK_{CZK/USD}$ je termínový kurz CZK/USD stanovený v čase T_0 pro termín T_1;
p_{USD} je úroková sazba z dolarového depozita v % p.a. pro období t;
p_{CZK} je úroková sazba z korunového depozita v % p.a. pro období t;
t je délka období od T_0 do T_1.

Jak již bylo řečeno, výsledky obou variant musejí být shodné, musí tedy platit:

$$K_{T0} \cdot (1 + \frac{p_{CZK} \cdot t}{36\,000}) = \frac{K_{T0}}{PK_{CZK/USD}} \cdot (1 + \frac{p_{USD} \cdot t}{36\,000}) \cdot TK_{CZK/USD}. \tag{18-9}$$

Úpravou rovnice potom dostaneme, že pro **termínový měnový kurz** musí platit:

$$TK_{CZK/USD} = PK_{CZK/USD} \cdot \frac{1 + \frac{p_{CZK} \cdot t}{36\,000}}{1 + \frac{p_{USD} \cdot t}{36\,000}}. \tag{18-10}$$

Obecně – pokud obě měny označíme jako A a B, můžeme vzorec pro termínový měnový kurz vyjádřit jako:

$$TK_{A/B} = PK_{A/B} \cdot \frac{1 + \frac{p_A \cdot t}{36\,000}}{1 + \frac{p_B \cdot t}{36\,000}}. \tag{18-11}$$

Dosud jsme při odvozování termínového měnového kurzu pracovali s kurzem střed, proto i výsledný kurz je kurzem střed. Obdobně jako u promptních měnových kurzů je možné stanovit i termínový kurz nákup a prodej. Můžeme je odvodit tak, že již do našich výchozích úvah promítneme úrokové sazby nákup a prodej.

Pro CZK/USD **termínový kurz nákup** bude potom platit:

$$^{N}TK_{CZK/USD} = {}^{N}PK_{CZK/USD} \cdot \frac{1 + \frac{^{N}p_{CZK} \cdot t}{36\,000}}{1 + \frac{^{P}p_{USD} \cdot t}{36\,000}} \tag{18-12}$$

a pro CZK/USD **termínový kurz prodej** platí:

$$^{P}TK_{CZK/USD} = {}^{P}PK_{CZK/USD} \cdot \frac{1 + \frac{^{P}p_{CZK} \cdot t}{36\,000}}{1 + \frac{^{N}p_{USD} \cdot t}{36\,000}}, \tag{18-13}$$

kde $^{N,P}PK_{CZK/USD}$ je promptní kurz CZK/USD v čase T_0 nákup, resp. prodej;

$^{N,P}TK_{CZK/USD}$ je termínový kurz CZK/USD, stanovený v čase T_0 pro termín T_1 nákup, resp. prodej;

${}^{N,P}p_{USD}$	je úroková sazba z dolarového depozita v % p.a;
${}^{N,P}p_{CZK}$	je úroková sazba z korunového depozita v % p.a.;
t	je délka období od T_0 do T_1.

Příklad 18-3 *Výpočet termínového měnového kurzu*

Vypočtěte termínový měnový kurz CZK/EUR nákup a prodej k termínu za půl roku, pokud jsou na promptním trhu kotovány následující hodnoty: promptní kurz CZK/EUR = 31,310 – 31,315; šestiměsíční úroková sazba z korun = 5,36 – 5,47; šestiměsíční úroková sazba z eur = 3,08 – 3,18.

Řešení

Termínový kurz nákup určíme podle vzorce:

$${}^{N}TK_{CZK/EUR} = {}^{N}PK_{CZK/EUR} \cdot \frac{1+\dfrac{{}^{N}p_{CZK}\cdot t}{36\,000}}{1+\dfrac{{}^{P}p_{EUR}\cdot t}{36\,000}} = 31{,}310 \cdot \frac{1+\dfrac{5{,}36\cdot 180}{36\,000}}{1+\dfrac{3{,}18\cdot 180}{36\,000}} = 31{,}646.$$

Termínový kurz prodej potom můžeme vypočítat podle vzorce 18-13:

$${}^{P}TK_{CZK/EUR} = {}^{P}PK_{CZK/EUR} \cdot \frac{1+\dfrac{{}^{P}p_{CZK}\cdot t}{36\,000}}{1+\dfrac{{}^{N}p_{EUR}\cdot t}{36\,000}} = 31{,}315 \cdot \frac{1+\dfrac{5{,}47\cdot 180}{36\,000}}{1+\dfrac{3{,}08\cdot 180}{36\,000}} = 31{,}684.$$

Termínový měnový kurz CZK/EUR k termínu za půl roku činí 31,646 – 31,684.

18.3.1 Swapová sazba

Termínové měnové kurzy mohou být kotovány i jako diference mezi termínovým a promptním kurzem. Tato diference je označována jako **swapová sazba[65].** Důvody pro tento způsob kotace jsou zejména v tom, že:

[65] Jako swapová sazba se rovněž označuje úroková sazba v úrokových či měnových swapech.

- pro některé obchody (např. devizové swapy) je důležitá pouze výše swapové sazby, nikoli tedy samotná výše promptního a termínového kurzu;
- swapová sazba podléhá méně častým změnám než termínový měnový kurz.

Výši swapové sazby jako rozdíl $TK - PK$ můžeme s využitím vzorce (18-11) vyjádřit jako:

$$Sw = TK_{A/B} - PK_{A/B} = PK_{A/B} \cdot \frac{1 + \dfrac{p_A \cdot t}{36\,000}}{1 + \dfrac{p_B \cdot t}{36\,000}} - PK_{A/B}. \qquad \textbf{(18-14)}$$

Po jednoduché úpravě potom pro swapovou sazbu dostaneme:

$$Sw = \frac{PK_{A/B} \cdot t \cdot (p_A - p_B)}{3600 + p_B \cdot t}, \qquad \textbf{(18-15)}$$

kde Sw je swapová sazba;
$PK_{A/B}$ je promptní měnový kurz A/B;
p_A je úroková sazba měny A v % p.a.;
p_B je úroková sazba měny B v % p.a.;
t je délka období od T_0 do T_1.

Ze vzorce pro výpočet swapové sazby je zřejmé, že swapová sazba může nabývat kladné či záporné hodnoty, pro stejné úrokové sazby obou měn je pak nulová.

Kladné hodnoty nabývá swapová sazba za předpokladu, že platí:

$$TK > PK, \qquad \textbf{(18-16)}$$

což nastává v tom případě, když mezi úrokovými sazbami obou měn platí vztah:

$$p_A > p_B. \qquad \textbf{(18-17)}$$

V tomto případě hovoříme o tom, že termínový kurz měn A/B má **prémii** (přirážku, report).

Analogicky zápornou hodnotu nabývá swapová sazba v tom případě, kdy:

$$TK < PK, \tag{18-18}$$

což nastává v opačném případě oproti předchozí situaci, tj. když mezi úrokovými sazbami obou měn platí vztah:

$$p_A < p_B. \tag{18-19}$$

V tomto případě hovoříme o tom, že termínový kurz měn A/B má **diskont** (srážku, deport).

18.3.2 Swapová sazba vyjádřená v % na roční bázi

V předchozím případě jsme vyjádřili swapovou sazbu v absolutním vyjádření jako rozdíl mezi termínovým a promptním měnovým kurzem. Swapovou sazbu můžeme ovšem i přepočítat na relativní roční bázi, tj. vyjádřit ji v % p.a.

Takto vyjádřená swapová sazba nám potom umožňuje velmi snadno určit, zdali je pro nás výhodnější investovat do měny A či B. Vyjadřuje totiž v procentech na roční bázi, o kolik bude celková výnosnost[66] investice do měny B vyšší nebo nižší vzhledem k úrokové sazbě dané měny. Jedná se přitom o výnos, zajištěný proti riziku změn měnového kurzu, neboli se jedná o výnos plynoucí z transakce, kdy kurz pro zpětnou směnu kapitálu je zajištěn termínovým obchodem.

Výnosnost (míru zúročení) investice můžeme v případě využití jednoduchého úročení podle vztahu (2-9) vyjádřit jako:

$$p = \frac{\left(\dfrac{K_{T_1}}{K_{T_0}} - 1\right) \cdot 36\,000}{t}, \tag{18-20}$$

kde p je úroková sazba (míra výnosu, výnosnost) v % p.a.;
K_{T_1} je konečný kapitál v čase T_1;

66 Pod celkovou výnosností se bude rozumět výnosnost investice, spočívající ve směně výchozího kapitálu do cizí měny, její uložení do doby T_1 a zpětná směna kapitálu včetně úroků za předem sjednaný termínový kurz do výchozí měny (to jest investiční varianta B), ze které jsme vycházeli při odvozování termínového měnového kurzu.

K_{T_0} je počáteční kapitál v čase T_0;
t je doba od T_0 do T_1.

Konečný kapitál z investice do cizí měny je podle (18-8) dán vztahem:

$$K_{T_1} = \frac{K_{T_0}}{PK_{A/B}} \cdot (1 + \frac{p_B \cdot t}{36\,000}) \cdot TK_{A/B}, \tag{18-21}$$

kde K_{T_1} je konečný kapitál v T_1 v měně A;
K_{T_0} je počáteční kapitál v T_0 v měně A;
$PK_{A/B}$ je promptní kurz A/B v čase T_0;
$TK_{A/B}$ je termínový kurz A/B, stanovený v čase T_0 pro termín T_1;
p_B je úroková sazba z depozita v měně B v % p.a.;
t je délka období od T_0 do T_1 ve dnech.

O kolik se liší výnosnost investice do měny B od úrokové sazby této měny určíme jako rozdíl mezi výnosností danou vztahem (18-20), do kterého dosadíme za konečný kapitál z výrazu (18-21), a úrokovou sazbou měny B. Tuto veličinu jsme označili jako swapovou sazbu v % p.a., to znamená, že platí:

$$p_{SW} = \frac{\left(\frac{\frac{K_{T_0}}{PK_{A/B}} \cdot \left(1 + \frac{p_B \cdot t}{36\,000}\right) \cdot TK_{A/B}}{K_{T_0}} - 1 \right) \cdot 36\,000}{t} - p_B. \tag{18-22}$$

Úpravou rovnice potom dostaneme vzorec pro výpočet swapové sazby v % p.a., který má tvar:

$$p_{SW} = \frac{Sw \cdot (36\,000 + p_B \cdot t)}{PK_{A/B} \cdot t}, \tag{18-23}$$

kde p_{SW} je swapová sazba, vyjádřená v % p.a.;
Sw je swapová sazba, vyjádřená jako rozdíl $TK - PK$;
K_{T_0} je počáteční kapitál v T_0 v měně A;
$PK_{A/B}$ je promptní kurz A/B v čase T_0;
p_B je úroková sazba z depozita v měně B v % p.a.;
t je délka období od T_0 do T_1 ve dnech.

Tato swapová sazba potom říká, o kolik se liší celková výnosnost investice do cizí měny oproti úrokové sazbě této měny, neboli jejím přičtením k úrokové sazbě této měny dostaneme v procentech na roční bázi celkovou výnosnost investice do cizí měny.

S tímto vzorcem se můžeme někdy setkat i ve zjednodušené formě, která se liší od výše uvedeného tím, že v čitateli zlomku zanedbává součin $p_B \cdot t$, a vzorec pro swapovou sazbu má potom tvar:

$$p_{SW} = \frac{Sw \cdot 36\,000}{PK \cdot t}. \qquad \textbf{(18-24)}$$

Příklad 18-4 *Výpočet swapové sazby v % p.a.*

Porovnejte vzájemně výhodnost uložení peněz na tříměsíční depozitum v korunách a v dolarech, pokud jsou na trhu následující podmínky: promptní kurz CZK/USD: $PK_{CZK/USD}$ = 28,640; tříměsíční swapová sazba CZK/USD: Sw = –0,090; depozitní tříměsíční korunová úroková sazba: p_{CZK} = 5,47; depozitní tříměsíční dolarová úroková sazba: p_{USD} = 6,75.

Řešení

Swapovou sazbu v procentech p.a. určíme dle vzorce (18-23) jako:

$$p_{SW} = \frac{Sw \cdot (36\,000 + p_B \cdot t)}{PK \cdot t} = \frac{-0{,}090 \cdot (36\,000 + 6{,}75 \cdot 90)}{28{,}640 \cdot 90} = -1{,}278.$$

Celkovou výnosnost investice do dolarového depozita potom zjistíme přičtením swapové sazby (v % p.a.) k dolarové depozitní sazbě, tj. –1,278 + 6,75 = 5,472. Celkový výnos do dolarového depozita činí 5,472 % p.a., a jak je vidět, je takřka totožný s korunovou depozitní úrokovou sazbou. Z toho vyplývá, že obě investice (korunové a dolarové depozitum) přinášejí prakticky shodný výsledek, trh neumožňuje provádět ziskové arbitráže.

18.4 Termínové obchody v praxi

V praxi se dnes na vyspělých finančních trzích objevuje celá plejáda nejrůznějších finančních termínových obchodů, označovaných dnes často jako finanční deriváty[67]. Vývoj v posledních letech ukazuje nejen na značnou dynamiku v objemu těchto obchodů, ale objevují se stále nové a nové instrumenty. Ukázat jejich vyčerpávající přehled je takřka nemožné. Omezíme se proto pouze na charakteristiku základních druhů finančních termínových obchodů:

- **Forwardové obchody** jsou mimoburzovní nestandardizované obchody, spočívající v pevné dohodě mezi dvěma subjekty o termínovém nákupu, resp. o prodeji cizích měn, ale i cenných papírů, o termínovém přijetí depozit či o poskytování úvěrů.
- **Futures obchody** jsou ve své podstatě shodné s obchody forwardovými, zásadním rozdílem je ovšem to, že se jedná o burzovní obchody. Termínová burza, na které je příslušný obchod uzavírán, upravuje jednotně podmínky (předmět obchodů, termín a způsob vypořádání, způsob stanovení ceny atd.), za kterých jsou tyto obchody sjednávány. Burza rovněž určitým způsobem garantuje plnění sjednaných obchodů.
- **Swapové obchody** představují opět pevnou dohodu mezi dvěma subjekty o budoucí opakované směně úrokových plateb, vztahujících se ke stejné částce kapitálu, ale definované různým způsobem (např. úrok stanovený na fixní bázi proti úroku, který se odvíjí podle vývoje tržních úrokových sazeb), popř. denominované i v různé měně (v tomto případě je swap spojen i se směnou kapitálů). Tyto swapy se označují jako úrokové, resp. měnové. Jiným druhem swapu je devizový swap, který je – na rozdíl od úrokových a měnových swapů – založen na jednorázové transakci, jejíž podstatou je dnešní směna kapitálu v měně A do měny B v promptním kurzu a současně zpětná směna těchto kapitálů k dohodnutému termínu v budoucnosti v pevně sjednaném termínovém kurzu.
- **Opční obchody** se od všech předchozích liší tím, že v tomto případě již nemají oba dva subjekty právo a současně povinnost obchod plnit, ale kupující – majitel opce – získává jejím zakoupením právo na plnění obchodu, zatímco proti němu stojící subjekt, prodávající opci, má povinnost na požádání obchod plnit. Opce se vyskytují jak jako standardizované burzovní obchody, tak i jako na míru šité obchody, uzavírané mimo burzu.

---

[67] Jsou totiž odvozeny – derivovány od jiných v základě ležících instrumentů.

Literatura

Blake, D.: Analýza finančních trhů. Grada, Praha 1995

Brealey, R. A. – Myers, S. C.: Teorie a praxe firemních financí. Victoria Publishing, Praha 1992

Büschgen, H. – Richolt, K.: Handbuch des internationalen Bankgeschäfts. Gabler Verlag, Wiesbaden 1989

Cipra, M. a kol.: Právní minimum pracovníka v bankovnictví. Final, Praha 1997

Cipra, T.: Finanční matematika v praxi. HZ, Praha 1993

Cipra, T.: Pojistná matematika v praxi. HZ, Praha 1994

Cipra T.: Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou. HZ, Praha 1995

Daigler, R. T.: Financial futures markets. Harpers Colins College Publishers, New York 1993

Doucha, R.: Stavební spoření. Grada Publishing, Praha 2000

Dvořák, P.: Deriváty. VŠE, Praha 2003

Dvořák, P.: Bankovnictví pro bankéře a klienty. Linde, Praha 2005

Hagenmüllerr, K. F. – Diepen, G.: Der Bankbetrieb. Gabler Verlag, Wiesbaden 1996

Hempel, G. H. – Simonson, D. G. – Coleman, A. B.: Bank Management. John Wiley and Sons, Inc. USA, 1994

Jährig, A. – Schuck, H.: Handbuch des Kreditgeschäfts. Gabler Verlag, Wiesbaden 1990

Jílek, J.: Finanční trhy. Grada Publishing, Praha 1997

Jílek, J.: Termínové a opční obchody. Grada, Praha 1995

Jílek, J. - Svobodová, J.: Účetnictví bank a finančních institucí 2005. Grada, Praha 2005

Jílek, J.: Finanční a komoditní deriváty. Grada, Praha 2002

Kalveram, W. – Dillemuth, H.: Bankrechnen. Gabler Verlag, Wiesbaden 1982

Kessler, H.: Internationale Handelsfinanzierung. Gabler Verlag, Wiesbaden 1996

Kolektiv: Peněžní ekonomie a bankovnictví. Management Press, Praha 1996

Kopáč, L.: Směnky a směnečné právo. Prospektrum, Praha 1992

Kosiol, E.: Finanzmathematik. Gabler Verlag, Wiesbaden 1984

Kovařík, Z.: Směnka a šek v České republice. C. H. Beck, Praha 1994

Levy, H. – Sarnat, M.: Kapitálové investice a finanční rozhodování. Grada Publishing, Praha 1999

Liška, P.: Jak chránit své úspory a vklady. Prospektrum. Praha, 1994

Macháček, O.: Finanční a pojistná matematika. Prospektrum, Praha 1996

Milgrom, P. – Roberts, J.: Modely rozhodování v ekonomii a managementu. Grada Publishing, Praha 1997

Mishkin, F. S.: Ekonomie peněz, bankovnictví a finančních trhů. Příloha časopisu Finance a úvěr, Praha 1991

Musílek, P.: Finanční trhy – instrumenty, instituce a management. VŠE 1994

Musílek, P.: Trhy cenných papírů. Ekopress, Praha 2002

Obst – Hintner: Geld-, Bank- und Börsenswesen. C. E. Poeschel Verlag, Stuttgart 1988

Píšek, Z. – Voženílková, B.: Směnky a šeky. PP Agency, Praha 1995

Polidar, V.: Management bank a bankovních obchodů. EKOPRESS, Praha 1995

Pulz, J.: Leasing v teorii a praxi. Grada, Praha 1993

Ripley, A.: Forfaiting for Exporters. International Thomson Business Press, London 1996

Rose, P. S.: Peněžní a kapitálové trhy. Victoria Publishing, Praha 1994

Sekerka, B.: Banky a bankovní produkty. Profess, Praha 1997

Sharpe, W. F. – Alexander, G. J.: Investice. Victoria Publishing, Praha 1994

Steigauf, S.: Investiční matematika. Grada Publishing, Praha 1999

Strong, R. A.: Derivatives: An Introduction. South-Western Thomson Learning. USA 2002

Sůvová, H. a kol.: Specializované bankovnictví. Bankovní institut, Praha 1997

Svobodová, V.: Směnka. ECON 1994

Tomášek, M.: Bankovnictví jednotného vnitřního trhu EU. Linde 1997

Vácha, P.: Některé otázky práva směnečného. Všehrd, Praha 1993

Wahl, D.: Finanzmathematik. Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart 1998

Walter, J.: Finanční a pojistná matematika. VŠE, Praha 1993

Rejstřík

Kniha umožní čtenáři srozumitelným způsobem se seznámit s matematickými postupy, které jsou spojeny s nejvýznamnějšími finančními produkty a instrumenty. Za hlavní výhody lze považovat stručnost a výstižnost knihy. Díky tomu čtenář pochopí finanční matematiku, aniž by musel u studia trávit příliš mnoho času. Jde o spolehlivého průvodce jak pro začátečníky, kteří se chtějí seznámit se základními finančními výpočty, tak pro pokročilejší hledající vysvětlení i složitějších finančně-matematických postupů. První část knihy vysvětluje matematické metody a postupy využívané v oblasti financí, druhá část je zaměřena na jejich konkrétní aplikaci u všech důležitých bankovních a finančních produktů (např. běžné účty, spoření, hypoteční úvěry, spotřebitelské úvěry, směnečné obchody, faktoring a forfaiting, dluhopisy, akcie, devizové obchody, finanční termínové obchody). Výklad, demonstrovaný na řadě konkrétních příkladů, umožní snadnou praktickou aplikaci jak při finančním rozhodování v podnikání, tak při správě soukromých financí.

Doc. Ing. Petr Dvořák, Ph.D.
Je děkanem Fakulty financí a účetnictví Vysoké školy ekonomické v Praze, na které působí již téměř třicet let. Ve své pedagogické a publikační činnosti se zaměřuje zejména na oblast komerčního bankovnictví, bankovních rizik a finančních derivátů. Je garantem bakalářského a magisterského oboru bankovnictví a pojišťovnictví, rovněž i postgraduálního kurzu peněžní ekonomie a bankovnictví, který je určen pro pracovníky bank a dalších finančních institucí.

Doc. RNDr. Jarmila Radová, Ph.D.
Je vedoucí katedry bankovnictví a pojišťovnictví Fakulty financí a účetnictví Vysoké školy ekonomické v Praze, kam nastoupila po absolvování Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze v roce 1979. Zabývá se aplikacemi matematiky v oblasti financí, pojišťovnictví a kapitálových trhů. Pedagogická a publikační činnost je zaměřena na finanční a pojistnou matematiku a oceňování zejména dluhových cenných papírů. Garantuje kurz Oceňování cenných papírů v Institutu oceňování majetku Vysoké školy ekonomické, určený pro odbornou veřejnost.

Doc. Mgr. Jiří Málek, Ph.D.
Je absolventem MFF-UK a na VŠE pracuje od roku 1979. Nejdříve na katedře ekonometrie a od roku 1996 na katedře bankovnictví a pojišťovnictví. Jeho odbornou specializací je oceňování finančních derivátů a řízení finančních rizik, které rovněž přednáší na specializovaných kurzech. Je garantem oboru vedlejší specializace Finanční inženýrství.

ISBN 978-80-247-4831-3
9 788024 748313

GRADA
Grada Publishing, a.s.,
U Průhonu 22, 170 00 Praha 7
tel.: +420 234 264 401, fax: +420 234 264 400
e-mail: obchod@grada.cz
www.grada.cz