Vysoká škola technická a ekonomická

v Českých Budějovicích

Aplikovaná matematika

Studijní opora pro kombinovanou formu studia

Garant: doc. RNDr. Zdeněk Dušek, Ph.D.

Ústav technicko-technologický

Katedra informatiky a přírodních věd

Obsah

1 Anotace

Období	1. semestr/ 1. ročník
Název předmětu	**Aplikovaná matematika**
Vyučovací jazyk	český
Garant předmětu	doc. RNDr. Zdeněk Dušek, Ph.D.
Garanční ústav	Ústav technicko-technologický
Katedra	Katedra informatiky a přírodních věd
Vyučující (přednášející)	doc. RNDr. Zdeněk Dušek, Ph.D.
Vyučující (cvičící)	doc. RNDr. Zdeněk Dušek, Ph.D. Mgr. Vladislav Biba, Ph.D.
Ukončení předmětu	zkouška
Poznámka k ukončení	docházka na semináře 70 % včetně dalších poznámek garanta předmětu
Rozsah	2/1
Počet kreditů	4
Cíle předmětu výstupy z učení	Předmět je zaměřen na pokročilé matematické metody používané ve finanční teorii. Cílem je seznámit studenty s posloupnostmi a řadami, principy časové hodnoty peněz a základními principy finančních trhů.
Výstupy z učení	Po úspěšném absolvování předmětu student: 4.1 využívá posloupnosti při řešení matematických problémů, 4.2 pracuje s časovými řadami, sčítá a analyzuje jejich konvergenci, 4.3 využívá různé druhy úročení s různou frekvencí, 4.4 stanoví efektivní a reálnou úrokovou sazbu, 4.5 vypočítá současnou a budoucí hodnotu anuity, sestaví umořovací schéma dluhu, 4.6 využívá matematické postupy při hodnocení deterministických toků cash flow, 4.7 ocení dluhopisy, akcie a pracuje s měnovými kurzy, 4.8 provádí analýzu citlivosti cen dluhopisů na změnu úrokové míry (durace, konvexita), 4.9 analyzuje výnos a riziko portfolia.
Osnova předmětu	<u>Přednášky</u> 1. Základní pojmy z finanční matematiky, posloupnosti a řady, součet řady. (4.1) 2. Úročení. Typy úročení. Jednoduché úročení, polhůtní, základní rovnice. Diskont. (Opakování a prohloubení znalostí.). (4.3)

	3. Složené úročení, základní rovnice. Smíšené úročení. Výpočet úrokové sazby a úroku. (Opakování a prohloubení znalostí.). (4.3, 4.4) 4. Spoření krátkodobé a dlouhodobé. (Opakování a prohloubení znalostí.). (4.5, 4.7) 5. Důchody jako pravidelné platby z investice, splácení úvěru s konstantní anuitou, úmor. (Opakování a prohloubení znalostí.). (4.5) 6. Směnky a směnečné obchody. Skonto. Běžné účty. Hypoteční úvěry. Spotřebitelské úvěry. Forfaiting, faktoring a leasing. (4.5) 7. Dluhopisy, durace, konvexita, imunizace. (4.7, 4.8) 8. Akcie, devizové obchody, finanční a termínové obchody, výkonosti portfolia, dvousložkové a vícesložkové portfolio. (4.7) 9. Měnové kurzy. (4.7) 10. Úvod do analýzy časových řad, klouzavý průměr, diference a index růstu. (4.1, 4.2) 11. Modelování časových řad, složky časových řad. (4.1, 4.2) 12. Trendová složka, modely trendových složek. (4.2) 13. Využití časových řad k prognózování. (4.2) <u>Semináře</u> 1. Základní pojmy z finanční matematiky, posloupnosti a řady. (4.1) 2. Jednoduché úročení, polhůtní, základní rovnice, diskont. (4.3) 3. Složené úročení, smíšené úročení, úroková sazba, úrok. (4.3, 4.4) 4. Spoření krátkodobé a dlouhodobé, využití součtu řady. (4.1, 4.5, 4.7) 5. Důchody, úvěr, splácení úvěru, úmor. (4.5) 6. Směnky a směnečné obchody, hypoteční a spotřebitelské úvěry. (4.5) 7. Oceňování dluhopisů. (4.7, 4.8) 8. Akcie, devizové obchody, finanční a termínové obchody, výkonosti portfolia, vícesložkové portfolio. (4.7) 9. Měnové kurzy. (4.7) 10. Úvod do analýzy časových řad, složky časových řad. (4.1, 4.2) 11. Modelování časových řad. (4.1, 4.2) 12. Trendová složka, modely trendových složek. (4.2) 13. Využití časových řad k prognózování. (4.2)
Organizační formy výuky	přednáška, seminář
Komplexní výukové metody	frontální výuka skupinová výuka - kooperace kritické myšlení samostatná práce – individuální nebo individualizovaná činnost
Studijní zátěž	(see table below)

Aktivita	Počet hodin za semestr	
	Prezenční forma	Kombinovaná forma
Příprava na průběžný test	5	0
Příprava na přednášky	15	0
Příprava na seminář, cvičení, tutoriál	15	60

Příprava seminární práce	0	0
Účast na přednáškách	26	0
Účast na semináři/cvičeních/tutoriálu/exkurzi	13	12
Příprava na závěrečný test	26	18
Účast na testech (průběžném a závěrečném)	6	14
Celkem:	104	104

Metody hodnocení a jejich poměr	2 průběžné testy, 2x 15% závěrečný test 70 %
Podmínky pro úspěšné absolvování předmětu včetně jejich hodnocení	Účast na seminářích. Zisk alespoň 70 % bodů z průběžného a závěrečného testu.
Informace učitele	Účast na výuce ve všech formách řeší samostatná vnitřní norma VŠTE (Evidence docházky studentů na VŠTE). Pro studenty prezenční formy studia je na seminářích a cvičeních povinná 70% účast.
Literatura povinná	ARLT, J. a M. ARTLOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. CIPRA, T., 2008. *Finanční ekonometrie.* Praha: Ekopress. ISBN 978-80-86929-43-9. DOŠLÁ, Z. a P. LIŠKA, 2014. *Matematika pro nematematické obory*. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-5322-5. PROUZA, L., 2007. *Finanční a pojistná matematika*. Praha: Vysoká škola ekonomie a managementu. ISBN 978-80-86730-17-2. ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi*. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4.
Literatura doporučená	ARLT, J., M. ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*, 2. vyd. Praha: Vysoká škola ekonomická, Oeconomica. ISBN 80-245-0777-3. EPPING, R. CH., 2004. *Průvodce globální ekonomikou.* Praha: Portál. ISBN 978-80-7178-825-6. JÍLEK, J., 2013. *Finance v globální ekonomice II – Měnová a kurzová politika.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-8822-7. RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého*. 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3.

	RADOVÁ, J., J. MÁLEK, P. JABLONSKÝ a M. RADA, 2011. *Finanční matematika pro každého – příklady + CD-ROM*. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-3584-9. ŠOBA O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2017. *Finanční matematika v praxi*. 2. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-271-0250-1.
Webové stránky	http://www.finmat.cz/ http://oldwww.upol.cz/fileadmin/user_upload/knihovna/Skripta_FF/finan.pdf http://kbp.vse.cz/wp-content/uploads/2012/12/St%C3%A1dn%C3%ADk_Teorie_a_Praxe_dluhopis%C5%AF.pdf http://mdg.vsb.cz/wiki/public/Excel7.pdf http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zichova/FinMat/Sbirka%20uloh%20z%20financni%20matematiky%20-%20Klara%20Jelenova.pdf
Publikační činnost	<u>Garant předmětu a přednášející (doc. RNDr. Zdeněk Dušek, Ph.D.)</u> DUŠEK, Z., 2015. The existence of light-like homogeneous geodesics in homogeneous Lorentzian manifolds. *Mathematische Nachrichten*. **288**(8-9), 872-876. ISSN 1522-2616. DUŠEK, Z. a O. KOWALSKI, 2015. Transformations between Singer-Thorpe bases in 4-dimensional Einstein manifolds. *Hokkaido Math. J.* **44**(3), 441-458. ISSN 0385-4035. DUŠEK, Z., 2015. Singer-Thorpe bases for special Einstein curvature tensors in dimension 4. *Czechoslovak Mathematical Journal*. **65**(4), 1101-1115. ISSN 0011-4642. DUŠEK, Z. a O. KOWALSKI, 2016. How many Ricci flat affine connections are there with arbitrary torsion? *Publ. Math. Debrecen*. **88**(3-4), 511-516. ISSN 0033-3883. Dušek, Z., 2016. Differential invariants of the metric field and a 1-form. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. **13**(10), 1-20. ISSN 0219-8878. <u>Cvičící (Mgr. Vladislav Biba, Ph.D.)</u> SMETANOVÁ, D., V. BIBA a M. VARGOVÁ, 2017. Aplikovaná matematika pro techniky. *Media4u Magazine*. **14**(2), 48-51. ISSN 1214-9187. SMETANOVÁ, D., M. VARGOVÁ a V. BIBA, 2016. Funkce dvou proměnných ve 3D náhledu. *Trendy ve vzdělávání*. **9**(1), 229-233. ISSN 1805-8949. BIBA, V., Š. HUSÁR a M. VARGOVÁ, 2016. Numerical methods in teaching of mechanical engineering. In: *APLIMAT 2016: 15th Conference*

	on Applied Mathematics. Bratislava: Slovak University of Technology in Bratislava, 66-74. ISBN 978-80-227-4531-4. SMETANOVÁ, D. et al., 2016. Mercator's Projection – a Breakthrough in Maritime Navigation. *Naše More*. **63**(3), 182-184. ISSN 0469-6255. BIBA, V. a M. KLEPANCOVÁ, 2015. Názor študentov na predmet chémia - skúmanie pomocou testu nezávislosti. *Trendy ve vzdělávání*. **8**(1), 22-26. ISSN 1805-8949.
Témata diplomových prací	Základní principy investování do akcií Matematické vlastnosti časových řad Analýza investičních strategií

2 Příprava na přednášky

2.1 Základní pojmy z finanční matematiky, posloupnosti a řady, součet řady

Klíčová slova

aritmetická posloupnost, geometrická posloupnost, součet řady, konvergence nekonečné řady

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je seznámit studenty s obecnými číselnými řady, speciálními typy řad ve finanční matematice a s pojmem nekonečné řady a její konvergence.

Výstupy z učení

- 4.1 využívá posloupnosti při řešení matematických problémů

Abstrakt

Přiblížíme si matematické základy o posloupnostech a řadách. Podrobný výklad najde čtenář ve studijní literatuře na uvedených stranách.

Studijní text

Posloupnosti

Posloupnost je funkce definována na množině $M \subseteq N$. Posloupnost označujeme zpravidla $\{a_n\}_{n=1}^{k}$, nebo, u nekonečné posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Člen neboli *n*-tý prvek posloupnosti označujeme a_n.

Aritmetická posloupnost je taková posloupnost, že každé dva po sobě následující členy se odlišují o stejnou hodnotu *d* (*d* se nazývá *diference*)

$$a_n - a_{n-1} = d, \qquad a_n = a_{n-1} + d$$

Geometrická posloupnost je taková, že podíl každých dvou po sobě následujících členů je stejná hodnota *q* (*q* nazýváme *kvocient* geometrické posloupnosti)

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q, \qquad a_n = a_{n-1} \cdot q$$

Číselné řady

Když $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, nazveme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots$$

nekonečnou číselnou řadou. *Posloupností částečných součtů* pak nazveme posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2, \qquad \ldots \qquad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad \ldots$$

Říkáme, že nekonečná řada *konverguje*, když posloupnost částečných součtů má konečnou limitu

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Součet *n* členů aritmetické posloupnosti s 1. členem a_1 a diferencí d je

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2 \cdot d) + \cdots (a_1 + (n-1) \cdot d)$$
$$= n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d$$

Součet *n* členů geometrické posloupnosti s 1. členem a_1 a kvocientem q je

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Nekonečná geometrická řada konverguje (má konečný součet) když $q < 1$, její součet je pak

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

Studijní literatura

Povinná literatura

DOŠLÁ, Z. a P. LIŠKA, 2014. *Matematika pro nematematické obory.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-5322-5. (s. 143-152).

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi*. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4 (s. 9-15).

Doporučená literatura

PROUZA, L., 2007. *Finanční a pojistná matematika*. Praha: Vysoká škola ekonomie a managementu. ISBN 978-80-86730-17-2 (s. 6-18).

Kontrolní otázky

1. Jakými způsoby může být zadána posloupnost? (popište alespoň 3)
2. Co je řada? Co je posloupnost částečných součtů?
3. Popište příklad z finančnictví, kde se můžeme setkat s posloupnostmi.
4. Popište příklad z finančnictví, kde se můžeme setkat s konečnou řadou.
5. Může nekonečná posloupnost mít konečný součet?
6. Co je to konvergence řady?
7. Jaké znáte kritéria konvergence (tj. podmínky, kdy řada konverguje)? (uveďte alespoň 2)
8. Jaký je součet geometrické posloupnosti?
9. Za jakých podmínek je součet geometrické posloupnosti konečný, i když posloupnost sama má nekonečně mnoho členů?
10. Může nekonečná aritmetická posloupnost mít konečný součet? Uveďte příklad.

Odkaz na praktickou část

3.1 Základní pojmy z finanční matematiky, posloupnosti a řady

2.2 *Úročení. Typy úročení. Jednoduché úročení, polhůtní, základní rovnice. Diskont*

Klíčová slova

jednoduché úročení, úroková sazba, diskont, srážková daň

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je připomenout studentům postupy u jednoduchého úročení, seznámit je s rozdíly mezi úročením a bankovním diskontem a s postupem započtení srážkové daně do finančních vzorců.

Výstupy z učení

- 4.3 využívá různé druhy úročení s různou frekvencí

Abstrakt

Přiblížíme si základní pojmy související s úročením. Podrobný výklad najde čtenář ve studijní literatuře na uvedených stranách.

Studijní text

Jednoduché úročení

Jednoduché úročení se používá v případech, že doba uložení kapitálu je kratší, než je délka jednoho úrokového období. Připsaný úrok bude činit

$$u = K_0 \cdot i \cdot \tau$$

K_0 je počáteční hodnota kapitálu

τ je doba uložení kapitálu, vyjádřena jako část délky úrokového období, tedy $0 \leq \tau \leq 1$

i je roční úroková míra (sazba) vyjádřena desetinným číslem, pro případ úrokové míry vyjádřené v procentech platí $i = \frac{p}{100}$

Celková hodnota kapitálu po uplynutí doby τ bude tedy

$$K = K_0 + u = K_0 \cdot (1 + i \cdot \tau)$$

K určení doby uložení kapitálu (tedy τ v předešlých vzorcích) se používá několik standardů. Standard ACT/365 uvažuje skutečný počet dní, které uběhli mezi uložením a výběrem (u přestupného roku se pak počítá 366 dní). Standardy ACT/360, 30E/360 a 30A/360 uvažují o něco jednodušší počítání, uvažuje se zde 360 denní rok, případně i každý měsíc jako 30 denní.

Srážková daň z výnosů

Výnos z kapitálu může být zdaněn srážkovou daní. Pokud uvažujeme srážkovou daň ve výši d (je vyjádřena desetinným číslem, nikoli procentuálně), bude tedy budoucí hodnota kapitálu

$$K = K_0 + u \cdot (1 - d) = K_0 \cdot (1 + i \cdot (1 - d) \cdot \tau)$$

Pokud bychom počítali s úrokovou mírou i^* , kde $i^* = i \cdot (1 - d)$ a výnos nepodléhá srážkové dani, dostaneme se ke stejnému vzorci. Srážkovou daní se proto dále nebudeme zabývat.

Diskont

Obchody s některými typy krátkodobých cenných papírů jsou založeny na principu obchodního (nebo bankovního) diskontu. Diskont D se (na rozdíl od úroku) počítá z budoucí hodnoty kapitálu K_n. Současná hodnota kapitálu je proto budoucí hodnotu snížená o diskont D

$$K_0 = K_n - D = K_n \cdot (1 - d \cdot \tau)$$

K_n je budoucí hodnota kapitálu (tj. splatná částka)

d je roční diskontní míra

Studijní literatura

Povinná literatura

PROUZA, L., 2007. *Finanční a pojistná matematika.* Praha: Vysoká škola ekonomie a managementu. ISBN 978-80-86730-17-2. (s. 20-41)

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4 (s. 16-44).

Doporučená literatura

RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého.* 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3. (s. 7-29)

Kontrolní otázky

1. Je doba uložení kapitálu (z pohledu finančních vzorců) stejná pro všechny bankovní standardy?
2. Uveďte příklad situace, kdy je doba určená pomocí standardu 30E/360 stejná jako u standardu ACT/365.
3. Uveďte příklad situace, kdy jsou doby určené pomocí standardů 30E/360 a ACT/365 odlišné.
4. Uveďte příklad situace, kdy jsou doby určené pomocí standardů ACT/365 a ACT/360 odlišné.
5. Který standard by (hypoteticky) byl pro mě nejvýhodnější, pokud mám prostředky uloženy od 15. února do 31. března?
6. Jaké jsou rozdíly v případech úročení a diskontování?
7. Má diskont stejný význam jako odúročení?
8. Když uvažujeme úrokovou a diskontní sazbu ve stejné výši, bude vycházet připsaný úrok stejný jako poskytnutý diskont?
9. Když uvažujeme úrokovou a diskontní sazbu ve stejné výši, která varianta je výhodnější pro dlužníka?
10. Jaký vztah by platil pro úrokovou a diskontní sazbu, pokud by budoucí hodnoty byly stejné?

Odkaz na praktickou část

3.2 Jednoduché úročení, polhůtní, základní rovnice, diskont

2.3 Složené úročení, základní rovnice. Smíšené úročení. Výpočet úrokové sazby a úroku

Klíčová slova

složené úročení, úrokové období, úročitel, efektivní úroková sazba, smíšené úročení

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je připomenout studentům vzorce pro složené úročení, seznámit je s počítáním pro různé délky úrokových období a porovnáváním finančních produktů s různou délkou úrokových období.

Výstupy z učení

- 4.3 využívá různé druhy úročení s různou frekvencí
- 4.4 stanoví efektivní a reálnou úrokovou sazbu

Abstrakt

Přiblížíme si pokročilé pojmy související s úročením. Podrobný výklad najde čtenář ve studijní literatuře na uvedených stranách.

Studijní text

Složené úročení

Složené úročení se používá pro případ kdy je doba delší než jedno úrokové období (pro jednoduchost uvažujme rok) a představuje násobek délky úrokového období. Pro případ úrokového období délky jednoho roku počítáme hodnotu kapitálu jako

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

K_0 je počáteční hodnota kapitálu

K_n je hodnota kapitálu po n letech

i je roční úroková míra (úroková sazba), člen $1 + i$ se nazývá úročitel

n je doba uložení kapitálu vyjádřena počtem let uložení kapitálu

Úrok může být připisován i s jinou periodicitou než 1 rok. I v těchto případech se však (zpravidla) uvádí roční úroková míra i. Pokud úroky jsou připsány m krát ročně, připíše se za každé období úrok dle míry i/m. Obecně za n úrokových období bude připsán úrok

$$\mathrm{K_n} = \mathrm{K_0} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right)^{\mathrm{n}}$$

i je roční úroková míra (neboli nominální úroková míra)

m je počet úrokových období za jeden rok (tj. $\mathrm{m} = 12$ pro měsíční konverzi, $\mathrm{m} = 4$ pro kvartální, …)

n je doba uložení kapitálu, je vyjádřena jako počet úrokových období (ne počet let!)

Efektivní roční úroková míra je taková úroková míra, že úrok připsán 1x ročně s touto mírou by byl stejný, jako celkový úrok za 1 rok s úrokovou mírou i (a jinou než roční konverzí). Platí proto

$$\mathrm{K_0} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right)^{\mathrm{m}} = \mathrm{K_0} \cdot (1 + \mathrm{i_{ef}}), \qquad \mathrm{i_{ef}} = \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right)^{\mathrm{m}} - 1$$

Smíšené úročení

Kapitál obvykle není uložen po dobu, která je násobkem délky úrokového období. V těchto případech je potřeba použít smíšené úročení, které je kombinací jednoduchého a složeného:

$$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n} \cdot \left(1 + \frac{i}{m} \cdot \tau\right)$$

n je počet ukončených celých úrokových období

τ je příslušná část posledního (necelého) období

Studijní literatura

Povinná literatura

PROUZA, L., 2007. *Finanční a pojistná matematika.* Praha: Vysoká škola ekonomie a managementu. ISBN 978-80-86730-17-2. (s. 37-48)

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4 (s. 45-62).

Doporučená literatura

RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého.* 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3. (s. 29-52)

Kontrolní otázky

1. Jsou z hlediska dlužníka následující varianty stejné? (předpokládejte, že dluh bude splacen až po 1 roce)
   a) připisování úroků ve výši 8 % 1x ročně, nebo
   b) připsání úroků 2 % 4x za rok (nominální úroková míra je tedy 8 %)
2. Je výhodnější uložit kapitál na účet s nominální úrokovou mírou 4 % a půlroční konverzi, nebo 4 % a měsíční konverzi? (předpokládejte uložení kapitálu po dobu min. 1 rok)
3. Která možnost u předešlého příkladu bude výhodnější, když doba uložení kapitálu bude jenom 2 měsíce?
4. Která možnost bude výhodnější, když doba uložení kapitálu bude 15 dní?
5. Je výhodnější uložit kapitál na účet s nominální úrokovou mírou 4 % a půlroční konverzi, nebo 3,8 % a měsíční konverzi? Jakým způsobem to zjistíte?
6. Jaký je rozdíl mezi nominální a efektivní úrokovou mírou?
7. Budou nominální a efektivní úroková míra mít stejnou hodnotu pro případ roční konverze úroků? Budou mít stejnou hodnotu pro případ kvartální konverze?
8. Bylo by možné do vzorců pro složené úročení zahrnout srážkovou daň stejně jako u jednoduchého úročení?
9. Půjčka ve výši 100 000 Kč má být splacena jednorázovou splátkou ve výši 125 000 Kč za tři roky. Jakým způsobem zjistím úrokovou sazbu pro případ roční konverze úroků? (Pro zjednodušení zde neuvažujme žádné poplatky).
10. Pokud banka používá úrokovou míru i, za jak dlouhý čas vzroste hodnota vkladu na dvounásobek? Jaký způsobem to zjistím?

Odkaz na praktickou část

3.3 Složené úročení, smíšené úročení úroková sazba, úrok

2.4 Spoření krátkodobé a dlouhodobé

Klíčová slova

spoření krátkodobé, spoření dlouhodobé, področnost, poplatek za vedení účtu

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je seznámit studenty s výpočty pro případ pravidelných vkladů, poukázat na rozdíly pro případ vkladů 1x nebo vícekrát za úrokové období a ukázat, proč tyto rozdíly vznikají.

Výstupy z učení

- 4.5 vypočítá současnou a budoucí hodnotu anuity, sestaví umořovací schéma dluhu
- 4.7 ocení dluhopisy, akcie a pracuje s měnovými kurzy

Abstrakt

Přiblížíme si základní pojmy související s krátkodobým a dlouhodobým spořením, kde využijeme matematický pojem součet řady. Podrobný výklad najde čtenář ve studijní literatuře na uvedených stranách.

Studijní text

Krátkodobé spoření

Krátkodobé spoření je pravidelné ukládání stejné částky po dobu kratší než je délka úrokového období (pro jednoduchost uvažujme 1 rok). Pro případ předlhůtních vkladů (tj. vklad na začátku každého měsíce) bude naspořená suma *

$$a = X \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} \cdot i\right)$$

X je výše jednoho vkladu

i je roční úroková míra

m je počet vkladů

Dlouhodobé spoření

Dlouhodobé spoření je pravidelné ukládání stejné částky po dobu delší, než je délka úrokového období. Předpokládejme nejdřív vklad pouze 1x za úrokové období a to na začátku období (předlhůtně). Po *n* úrokových obdobích (letech) bude naspořená částka činit

$$S_n = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

kde n je počet úrokových období po které se spoří.

Nejobecnějším případem je ukládání více vkladů v každém úrokovém období. V tomto případě se naspořená částka vypočte skombinováním předešlých vzorců. Po n úrokových obdobích bude naspořená částka na konci posledního úrokového období (pro předlhůtní vklady)

$$\mathrm{S_n} = \mathrm{X} \cdot \mathrm{m} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{m}+1}{2\mathrm{m}} \cdot \mathrm{i}\right) \cdot \frac{(1+\mathrm{i})^\mathrm{n} - 1}{\mathrm{i}}$$

kde m je počet vkladů za úrokové období a n je počet úrokových období po které se spoří.

Poplatky spojené s vedením účtu, které finanční instituce ze spořicího účtu stahuje, se do vzorce zahrnou následovně:

$$\mathrm{S_n} = \mathrm{X} \cdot \mathrm{m} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{m}+1}{2\mathrm{m}} \cdot \mathrm{i} - \mathrm{P}\right) \cdot \frac{(1+\mathrm{i})^\mathrm{n} - 1}{\mathrm{i}}$$

kde P je výše všech poplatků za jedno úrokové období, přepočtena ke konci úrokového období.

* vzorce uváděné na této straně jsou odvozeny pomocí součtu řady.

Studijní literatura

Povinná literatura

PROUZA, L., 2007. *Finanční a pojistná matematika*. Praha: Vysoká škola ekonomie a managementu. ISBN 978-80-86730-17-2 (s. 49-54).

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4 (s. 63-84).

Doporučená literatura

RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého*. 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3. (s. 71-88)

Kontrolní otázky

1. Odvoďte vzorec pro případ spoření kvartálními vklady (ve stejné výši) po dobu 1 rok a ročního připisování úroků, využijte součet řady.
2. Odvoďte vzorec pro případ spoření kvartálními vklady po dobu 1 rok a kvartálního připisování úroků, využijte součet řady.
3. Popište hlavní důvod, proč je potřeba mezi předešlými dvěma případy rozlišovat
4. Bylo by možné do uvedených vzorců zahrnout i srážkovou daň z úroků?
5. Je možné porovnávat dvě spoření s různou délkou úrokového období (např. kvartální a roční) pomocí efektivní úrokové sazby?
6. Jaké problémy vznikají u porovnávání v předešlé otázce? Analyzujte případ kvartálních vkladů a případ měsíčních vkladů.
7. Po dobu 6 let pravidelně vkládám na spoření 2 000 Kč měsíčně. Přesně po 3 letech mimořádně vložím dalších 10 000 Kč. Jakým postupem spočítáte sumu naspořenou po 6 letech? (Poplatky a zdanění neuvažujte, uvažujte roční připisování úroků.)
8. Po dobu 6 let pravidelně vkládám na spoření 2 000 Kč měsíčně. Po 3 letech zvýším vklady na 3 000 Kč. Jakým postupem spočítáte sumu naspořenou po 6 letech? (Poplatky a zdanění neuvažujte.)
9. Po dobu 6 let pravidelně vkládám na spoření 2 000 Kč měsíčně. Po 3 letech změním vklady na kvartální ve výši 6 000 Kč. Jakým postupem spočítáte sumu naspořenou po 6 letech? (Poplatky a zdanění neuvažujte, uvažujte roční připisování úroků.)
10. Po dobu 6 let pravidelně vkládám na spoření 6 000 Kč kvartálně. Jakým postupem zjistíte, po jakém čase bude naspořená suma činit 100 000 Kč? Uvažujte kvartální připisování úroků.

Odkaz na praktickou část

3.4 Spoření krátkodobé a dlouhodobé, využití součtu řady

2.5 *Důchody jako pravidelné platby z investice, splácení úvěru s konstantní anuitou, úmor*

Klíčová slova

důchod, anuita, úmor, poplatek za vedení účtu

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je seznámit studenty s výpočty pro současnou hodnotu příštích výplat, ukázat podobnosti a rozdíly oproti případu pravidelných vkladů, a ukázat podobnosti a rozdíly s případem splácení dluhu.

Výstupy z učení

- 4.5 vypočítá současnou a budoucí hodnotu anuity, sestaví umořovací schéma dluhu

Abstrakt

Přiblížíme si základní pojmy související s důchodem a nastíníme podobnosti a rozdíly s pravidelnými vklady, resp. se splácením dluhu. Podrobný výklad najde čtenář ve studijní literatuře na uvedených stranách.

Studijní text

Důchod

Důchodem (anuitou) rozumíme pravidelné vyplácení stejných částek z uloženého kapitálu. Jedná se tedy o případ podobný jako u dlouhodobého spoření. Současná hodnota důchodu pro případ jedné výplaty za úrokové období (pro jednoduchost rok) a předlhůtní výplatu je

$$D = (a \cdot (1 + i) + P) \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

a　je výše jedné výplaty

v　je *odúročitel*, platí $v = \frac{1}{1+i}$

n　je počet úrokových období, během kterých bude důchod vyplácen

P　je výše poplatků přepočtena ke konci úrokového období (oproti spoření je zde je „+“, protože poplatky platí příjemce důchodu a tudíž uložená suma musí poplatky již zohledňovat)

Pro (obvyklý) případ více než jedné výplaty v úrokovém období je současná hodnota výplat

$$D = \left(X \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) + P\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

X je výše jedné výplaty

m je počet výplat za úrokové období

Umořování (splácení) dluhu

Proberme dvě možnosti splácení dluhu: s konstantní splátkou (anuitou) a s konstantním úmorem. U případu konstantních splátek jednou za úrokové období budou splátka a_r a úmor M_r v r-tém období činit

$$a_r = D \cdot \frac{i}{1 - v^n}$$

$$M_r = D \cdot \frac{i \cdot v^{n-r+1}}{1 - v^n}$$

Pro případ splácení se stejným úmorem v každém období bude

$$a_r = \frac{D}{n}\left((n - r + 1) \cdot i + 1\right)$$

$$M_r = \frac{D}{n}$$

D je počáteční hodnota dluhu

Studijní literatura

Povinná literatura

PROUZA, L., 2007. *Finanční a pojistná matematika.* Praha: Vysoká škola ekonomie a managementu. ISBN 978-80-86730-17-2. (s. 39-74)

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4 (s. 85-120).

Doporučená literatura

RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého.* 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3. (s. 89-131)

Kontrolní otázky

1. Odvoďte vzorec pro případ důchodu vypláceného jednou ročně (ve stejné výši) po dobu 10 let a ročního připisování úroků, využijte součet řady. (Pozn.: všimněte si, že

v odvození se u všech členů vyskytuje zlomek $\frac{1}{1+i}$, tudíž je vhodné využít odúročitel v.)

2. Odvoďte vzorec pro případ důchodu vypláceného 12 krát ročně po dobu 10 let a ročního připisování úroků, využijte součet řady.
3. Popište hlavní důvod, proč je potřeba mezi předešlými dvěma případy rozlišovat
4. Odvoďte vzorec pro a_r pro případ splácení dluhu roční splátkou ve stejné výši po dobu 10 let a ročního připisování úroků, využijte součet řady.
5. Odvoďte vzorec pro a_r pro případ splácení dluhu měsíční splátkou ve stejné výši po dobu 10 let a ročního připisování úroků, využijte součet řady (pozn. tento vzorec není výše uveden).
6. Je možné porovnávat dva úvěry s různou délkou úrokového období (např. kvartální a roční) pomocí efektivní úrokové sazby?
7. Jakým způsobem se do vzorce pro výši konstantní splátky zahrnou poplatky spojené s vedením účtu?
8. Odvoďte vzorec pro a_r pro případ splácení dluhu nestejnými ročními splátkami avšak se stejným úmorem v každém období po dobu 10 let a ročního připisování úroků, využijte součet řady.
9. Jakým způsobem poplatky spojené s vedením účtu projeví ve vzorcích pro úmor?
10. Bylo by možné do vzorců pro splácení dluhu zahrnout i srážkovou daň z úroků? Má tento postup smysl?

Odkaz na praktickou část

3.5 Důchody, úvěr, splácení úvěru, úmor

2.6 Směnky a směnečné obchody. Skonto. Běžné účty. Hypoteční úvěry. Spotřebitelské úvěry. Forfaiting, faktoring a leasing

Klíčová slova

Směnka, skonto, úvěr, forfaiting, faktoring, leasing

Cíle kapitoly

Student získá znalosti v oblasti jednotlivých úvěrů a leasingu. Je schopen si stanovit jednotlivé výše splátek. Dokáže posoudit, zda jaké formy financování jsou pro něj nejvýhodnější. Na základě studia je schopen sestavit platnou směnku.

Výstupy z učení

- 4.5 vypočítá současnou a budoucí hodnotu anuity, sestaví umořovací schéma dluhu

Abstrakt

Přiblížíme si směnky, hypoteční úvěry, spotřebitelské úvěry a další související pojmy. Podrobný výklad najde čtenář ve studijní literatuře na uvedených stranách.

Studijní text

Směnka

Směnka je cenný papír, který splňuje zákonem předepsané závazné náležitosti. Směnkou se výstavce směnky bezpodmínečně buď u směnky vlastní sám zavazuje, nebo u směnky cizí přikazuje určité osobě (směnečníkovi) zaplatit ve stanoveném termínu právoplatnému majiteli směnky na směnce uvedenou finanční částku.

Skonto

V případech kdy prodávající firma dává možnost zaplatit zboží kupující firmě až po určitém období (prodává tedy na obchodní úvěr), poskytuje někdy současně možnost získání slevy na dohodnuté ceně za předpokladu, že kupující zaplatí okamžitě.

Běžný účet

Představuje jednu ze základních bankovních produktů, který stojí velmi často na počátku vzájemných vztahů mezi klientem a bankou.

Hypoteční úvěry

Základní charakteristický rys hypotečních úvěrů je jejich zajištění zástavním právem k nemovitosti.

Spotřební úvěry

Spotřebitelský úvěr je zpravidla poskytován fyzickým osobám na nepodnikatelské účely.

Forfaiting

Představuje odkup střednědobých až dlouhodobých pohledávek, které obvykle vznikají při vývozu, eventuálně dovozu na dodavatelský úvěr.

Faktoring

Smluvně sjednaný odkup krátkodobých pohledávek, které vznikli dodavateli v důsledku poskytnutí nezajištěného dodavatelského úvěru.

Leasing

Leasing přestavuje další alternativní variantu financování ve vztahu k bankovním úvěrům. Lze jej také charakterizovat jako určitou formu pronájmu, kdy pronajímatel – leasingová společnost – pronajímá předmět leasingu nájemci na určitou dobu a ten se zavazuje platit dohodnuté leasingové splátky.

Studijní literatura

Povinná literatura

PROUZA, L., 2007. *Finanční a pojistná matematika.* Praha: Vysoká škola ekonomie a managementu. ISBN 978-80-86730-17-2. (s. 77-81)

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4 (s. 171-188).

Doporučená literatura

RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého.* 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3. (s. 152-201)

Kontrolní otázky

1. Započítává se den eskontu do zbytkové doby splatnosti směnky?
2. Jakým způsobem lze převést rektasměnku?
3. Kdy je pro kupujícího výhodnější využít skonto a zaplatit sníženou cenu ihned, nebo odsunout zaplacení na pozdější dobu s tím, že zaplatí plnou cenu?
4. V jakém případě bude vyšší výše anuity, když bude úroková sazba 10% nebo 15%.
5. V jakých případech dohází u forfaitingu ke zvýšení sraženého diskontu?
6. Jaký je rozdíl mezi finančním a operativním leasingem?
7. Jaké charakteristiky musím brát v úvahu, pokud se rozhoduji, jestli pohledávku budu financovat faktoringem nebo úvěrem.
8. Jakými způsoby se počítají úroky na běžném účtu?
9. Ovlivňuje výši hypotečního úvěru cena zástavy?
10. Jakým způsobem se stanoví výše státní podpory a co ji ovlivňuje.

Odkaz na praktickou část

3.6 Směnky a směnečné obchody, hypoteční a spotřebitelské úvěry

2.7 Dluhopisy, durace, konvexita, imunizace

Klíčová slova

dluhopis, vnitřní hodnota dluhopisu, rendita, durace dluhopisu

Cíle kapitoly

Student získá znalosti v oblasti oceňování různých typů dluhopisů pomocí vnitřní hodnoty, výnosnosti dluhopisu, citlivosti vnitřní hodnoty na požadovanou výnosnost.

Výstupy z učení

- 4.7 ocení dluhopisy, akcie a pracuje s měnovými kurzy
- 4.8 provádí analýzu citlivosti cen dluhopisů na změnu úrokové míry (durace, konvexita)

Abstrakt

Přiblížíme si základní pojmy související s dluhopisy. Podrobný výklad najde čtenář ve studijní literatuře na uvedených stranách.

Studijní text

Vnitřní hodnota dluhopisu

Dluhopis je cenný papír, který vyjadřuje dlužní závazek vystavujícího (eminenta) vůči držiteli (oprávněnému). Držitel dluhopisu je oprávněn po eminentovi požadovat (v době splatnosti) splacení jmenovité hodnoty, na kterou je dluhopis vystaven a taky ve stanovených dobách požadovat splacení stanovených výnosů (kupónů). Z uvedeného plyne, že dluhopis můžeme ocenit pomocí současné hodnoty všech budoucích plateb. Vnitřní hodnota dluhopisu je proto

$$\mathrm{VH} = \mathrm{JH} \cdot \frac{1}{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}} + \mathrm{C} \cdot \frac{1-\mathrm{v}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}$$

JH je jmenovitá hodnota, na kterou je dluhopis vystaven

C je výše kupónové platby (zde předpokládáme platby ve stejné výši)

i je požadovaná výnosnost za jedno úrokové období, v je odúročitel

n je počet úrokových období, která zbývají do splatnosti dluhopisu

V této kapitole záměrně používáme termín vnitřní hodnota, abychom se vyhnuli termínu cena. Cena dluhopisu je určena trhem cenných papírů. Z hlediska počtu výplat z dluhopisu existují: *kupónový dluhopis* (držitel má i nárok na výplatu kupónové platby), *zerobond* (dluhopis bez kupónové platby) a *konzole* (věčný dluhopis přinášející pouze kupónovou platbu ve stanovených intervalech).

Durace, konvexita

$$D_M = \frac{JH \cdot n \cdot v^n + C \cdot (1 \cdot v + 2 \cdot v^2 + \cdots + n \cdot v^n)}{JH \cdot v^n + C \cdot (v + v^2 + \cdots + v^n)}$$

Durace dluhopisu je ukazatelem toho, za jak dlouho se investorovi vrátí cena zaplacená za dluhopis (cena je vlastně postupně splácena kupónovými platbami).

Durace taky poskytuje informaci, jak se změní vnitřní hodnota dluhopisu při malé změně úrokové míry (o Δi)

$$\Delta VH \approx -D_M \cdot \frac{P}{1+i} \cdot \Delta i$$

Tento odhad může být dále zpřesněn využitím *konvexity:*

$$\Delta VH \approx -D_M \cdot \frac{VH}{1+i} \cdot \Delta i + \frac{1}{2} C_M \cdot VH \cdot (\Delta i)^2$$

$$C_M = \frac{JH \cdot n \cdot (n+1) \cdot v^{n+2} + C \cdot (2 \cdot v^3 + 6 \cdot v^4 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot v^{n+2})}{JH \cdot v^n + C \cdot (v + v^2 + \cdots + v^n)}$$

Studijní literatura

Povinná literatura

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4 (s. 189-216).

Doporučená literatura

RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého.* 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3. (s. 131-195)

Kontrolní otázky

1. Dluhopis se jmenovitou hodnotou 100 000 Kč splatný (přesně) za 5 let přináší navíc kupónové platby ve výši 6 % JH, 2x ročně. Jak určíte míru výnosnosti, kterou dosáhneme, pokud dluhopis koupíme dnes za 100 000 Kč?

2. Který z dluhopisů má nejvyšší současnou hodnotu, když požadujeme výnosnost 8 % p.a.? Může se tato volba změnit pro jinou požadovanou výnosnost? Proč?
   A, JH = 10 000 Kč, splatný (přesně) za 5 let, kupónová platba 2 000 Kč 1x ročně
   B, JH = 20 000 Kč, splatný za 4 roky
3. Dluhopis se jmenovitou hodnotou 100 000 Kč splatný (přesně) za 5 let přináší navíc kupónovou platbu ve výši 12 %, 1x ročně. V případě požadované výnosnosti 8 % p.a. činí jeho současná hodnota 115 970 Kč. Jakým postupem lze odhadnout výnosnost, kterou dosáhneme, pokud dnes dluhopis koupíme za 120 000 Kč?
4. Bylo by v předchozím příkladu možné využít pro odhad duraci dluhopisu? Jak?
5. Jaký je vztah mezi durací a dobou splatnosti dluhopisu?
6. Bylo by možné, aby durace přesáhla dobu splatnosti?
7. Jaká je durace pro případ zerobondu (bezkupónového dluhopisu)?
8. Pokuste se určit vzorec pro duraci pro případ věčného dluhopisu. (Využijte nekonečnou řadu.)
9. Co je rendita dluhopisu?
10. Z jakého důvodu u dluhopisů neuvažujeme o srážkové dani?

Odkaz na praktickou část

3.7 Oceňování dluhopisů

2.8 *Akcie, devizové obchody, finanční a termínové obchody, výkonosti portfolia, dvousložkové a vícesložkové portfolio*

Klíčová slova

Akcie, ážio, devizový trh, riziko, střední hodnota, rozptyl, výnosy, faktory,

Cíle kapitoly

Student se během předmětu seznámí s problematikou devizových trhů, vztahů mezi nimi. Dále se podrobně seznámí s akciemi. Dokáže odhadnout rizika spojená s portfoliem a faktory, které jej ovlivňují.

Výstupy z učení

- 4.7 ocení dluhopisy, akcie a pracuje s měnovými kurzy

Abstrakt

Přiblížíme si základní pojmy související s akciemi a jejich obchodováním. Podrobný výklad najde čtenář ve studijní literatuře na uvedených stranách.

Studijní text

Akcie

Akcie je cenný papír, který představuje podíl na základním kapitálu akciové společnosti. Majitel akcie je akcionář. Akcionář má právo podílet se zákonem a stanovami společnosti vymezeným způsobem na jejím řízení, jejím zisku a likvidačním zůstatku při případném zániku společnosti.

Devizové obchody

Trh je tvořen především obchodováním mezi bankami, po síti Reuters nebo podobném elektronickém spojení. Kromě bank se jej účastní několik typů dalších finančních institucí jako exportéři, importéři, zprostředkovatelé a specializovaní obchodníci, kteří obchodují ve velkých objemech. Trh je globální. Tento trh existuje jako neorganizovaný trh s volným přístupem.

Finanční a termínované obchody

Za termínové obchody je možno považovat takové obchodní transakce, kdy mezi okamžikem jejich uzavření a dohodnutým termínem vypořádání existuje delší, mnohdy i mnohaměsíční časová prodleva. Termínové obchody se uzavírají na tzv. termínových trzích.

Výnosnosti portfolia

Jestliže chceme vypočítat výnosnost jednotlivé investice, stačí znát hodnotu vložené peněžní částky na počátku a koncovou hodnotu. K hodnocení výnosnosti portfolia se používá nejčastěji časově vážená metoda a peněžně vážená metoda.

Dvousložkové a vícesložkové portfolio

Efektivní portfolio je takové, které z množiny portfolií se stejným rizikem má nejvyšší očekávaný výnos. Těchto faktorů, může být velké množství. Nejjednodušším případem je jednofaktorový model.

$$R_i \ = \ bi_0 + bi_1 \cdot F_1 + \varepsilon_i$$

R_i výnosnost i-tého aktiva (portfolia),

F_1 je hodnota faktoru,

bi_0 je absolutní člen,

bi_1 je koeficient citlivosti výnosnosti aktiva na faktor F1,

ε_i je náhodná chyba.

Dvousložkové portfolio oproti jednofaktorovým modelům je zřejmě počet faktorů, které vysvětlují výnosnost aktiva.

$$R_i \ = \ bi_0 + bi_1 \cdot F_1 + bi_2 \cdot F_2 + \cdots + bi_K \cdot F_K \ + \varepsilon_i$$

R_i je výnosnost i-tého aktiva (portfolia),

F_j jsou hodnoty vybraných faktorů,

bi_0 je absolutní člen, bij jsou citlivosti výnosnosti i-tého aktiva na faktory Fj ,

ε_i je náhodná chyba.

Studijní literatura

Povinná literatura

PROUZA, L., 2007. *Finanční a pojistná matematika.* Praha: Vysoká škola ekonomie a managementu. ISBN 978-80-86730-17-2. (s. 77-81)

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4 (s. 239-262).

Doporučená literatura

RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého.* 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3. (s. 207-225)

Kontrolní otázky

1. Jak se nazývá rozdíl mezi tržní a nominální hodnotou akcie?
2. Jaké máme druhy akcií?
3. Z čeho se akcie skládá?
4. Jaké motivy vedou subjekty ke sjednávání termínovaných vkladů?
5. Jak nazýváme diferenci mezi termínovým a promptním kurzem?
6. Vysvětlete forwardové obchody?
7. Vysvětlete opční obchody?
8. Jakými metodami lze měřit výnosnost portfolia?
9. Popište modifikovanou Dietzovu metodu?
10. Co jsou to termínované obchody?

Odkaz na praktickou část

3.8 Akcie, devizové obchody, finanční a termínové obchody, výkonosti portfolia, vícesložkové portfolio

2.9 Měnové kurzy

Klíčová slova

Měnový kurz, měnový trh, dovoz, vývoz, revalvace, devalvace

Cíle kapitoly

Student se během předmětu seznámí s problematikou mezinárodních měnových systémů a vztahů mezi nimi. Seznámí se s pojmy měnového systému. Naučí se stanovit měnový kurz.

Výstupy z učení

- 4.7 ocení dluhopisy, akcie a pracuje s měnovými kurzy

Abstrakt

Přiblížíme si základy o měnových kursech. Podrobný výklad najde čtenář ve studijní literatuře na uvedených stranách.

Studijní text

Měnový kurz

Měnový kurz je z kvantitativního hlediska poměr, v jakém se směňují dvě navzájem cizí měny neboli cena jedné měny vyjádřená v jiné měně.

Měnový kurz se rozlišuje podle dvou forem peněz následovně:

- devizový kurz, který je cenou deviz, tj. bezhotovostních cizích peněz ve formě zůstatků na bankovních účtech nebo směnek, šeků aj.;
- valutový kurz, který je cenou valut, to znamená hotovostních cizích peněz ve formě bankovek a mincí.

Měnový kurz je možno dále rozlišovat z hlediska lhůty, ve které dochází k realizaci obchodu na základě daného kurzu následovně:

- promptní kurz, který se týká obchodů vypořádaných do dvou obchodních dnů po jejich sjednání;
- termínový kurz, který se naproti tomu vztahuje k obchodům sjednaným dnes, jejichž plnění však nastává až ve stanoveném termínu v budoucnosti.

Kotace měnových kurzů

Subjekty, které provádějí obchody s cizími měnami, musejí měnové kurty stanovit, tzv. kotovat, v určité formě. V praxi jsou možné dva způsoby kotace:

- při přímé kotaci se vyjadřuje počet jednotek domácí měny za jednotku cizí měny,
- při nepřímé kotaci se naopak vyjadřuje počet jednotek cizí měny za jednotku měny domácí.

Při kotaci kurzu uvádějí banky pro každou měnu dva kurzy. Kurz nákup a kurz prodej.

Kurz nákupu můžeme vyjádřit:

$$K_{dom} = K_{cizí} * PK,$$

K_{dom} je částka v domácí měně;

$K_{cizí}$ je směnovaná částka v cizí měně,

PK je promptní měnový kurz, vyjádřený přímou kotací.

Kurz prodeje můžeme vyjádřit:

$$K_{cizí} = \frac{K_{dom}}{K},$$

Studijní literatura

Povinná literatura

ŠOBA O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2017. *Finanční matematika v praxi.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4. (s. 263-281)

Doporučená literatura

JÍLEK J., 2013. *Finance v globální ekonomice II – Měnová a kurzová politika.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-8822-7. (s. 333-345)

RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého.* 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3. (s. 152-201)

Kontrolní otázky

1. Co je to Exchange Rate Deviation Index (ERDI)?
2. V jakém rozmezí se pohybuje ERDI ve vyspělých ekonomikách?
3. Je nadměrná volatilita kurzu zejména pro malou otevřenou ekonomiku škodlivá?
4. Co zabezpečuje rovnovážný kurz?

5. V zemi dochází k rychlému růstu peněžní zásoby (vyššímu než v zahraničí). Centrální banka přitom nechává měnový kurz volně plavat. Co to udělá s měnovým kurzem?
6. Co jsou to křížové kurzy?
7. Popište kurz na střed.
8. Co je to měnový kurz?
9. Jaké faktory se promítají do měnového kurzu?
10. Skutečný kurz se může od rovnovážného kurzu odchylovat po dosti dlouhé období z jakých důvodů?

Odkaz na praktickou část

3.9 Měnové kurzy

2.10 *Úvod do analýzy časových řad, klouzavý průměr, diference a index růstu*

Klíčová slova

časové řady, klouzavý průměr, diference, index růstu

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je seznámit studenty se základem problematiky časových řad a ukazatelů jejich průběhu.

Výstupy z učení

- 4.1 využívá posloupnosti při řešení matematických problémů
- 4.2 pracuje s časovými řadami, sčítá a analyzuje jejich konvergenci

Abstrakt

Přiblížíme si základy pro práci s časovými řadami. Podrobný výklad najde čtenář ve studijní literatuře na uvedených stranách.

Studijní text

Časové řady

Časová řada je numerická řada, jejíž hodnoty podstatně závisí na čase, v němž byly získány (posloupnost chronologicky uspořádaných pozorování). Časové okamžiky, kdy byla data získána, jsou od sebe většinou stejně vzdáleny.

Časové řady lze klasifikovat podle různých hledisek, např.:

podle charakteru dat, jejichž hodnoty tvoří časovou řadu

- časové řady intervalové - data závisí na délce intervalu, který je sledován (např. měsíční výroba cementu v ČR)
- časové řady okamžikové - data se vztahují k určitému okamžiku (počet zaměstnanců v podniku v r. 2008 – 2018)

Klouzavý průměr:

Klouzavý průměr, nebo také „simple moving average" (MA) patří k jedné ze základních, časem prověřených a spoustou obchodníků používaných vstupních a výstupních strategií (většinou však v kombinaci ještě s dalšími strategiemi či podmínkami pro vstup a výstup do trhů/z trhů např. výše ceny). Jedná se o strategii poměrně silnou a spolehlivou.

$$MA = \frac{P_1 \ + P_2 + \cdots + P_n}{n}$$

P_n je uzavírací cena (close) n-intervalu obchodních dnů,

n je počet dnů, na jehož základě klouzavý průměr počítáme,

Diference:

Zkoumáním závislosti dvou řad je diference (dif). Tento přístup, jak z názvu vyplývá, vychází z rozdílu hodnot. První diference je u analýzy časových řad prostým rozdílem hodnot ve dvou po sobě jdoucích časech. Nově vzniklá časová řada respektive její určitý úsek vyjadřuje vzájemný pohyb původních hodnot. Vztah je matematicky definován následovně:

$$dif = a_t - a_{t-1}$$

a_t je - hodnota časové řady v čase t,

a_{t-1} je hodnotu časové řady v čase t-1

Index růstu:

Index růstu představuje poměrné číslo, tj. porovnání podílem. Nejčastěji se tím vyjadřuje změna veličiny v běžném období proti základnímu. Indexy dělíme na individuální jednoduché, složené a souhrnné. Dále je dělíme na indexy objemu a indexy úrovně.

Studijní literatura

Povinná literatura

CIPRA, T., 2008. *Finanční ekonometrie.* Praha: Ekopress. ISBN 978-80-86929-43-9. (s. 257-259)

Doporučená literatura

ARLT, J. a M. ARTLOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady.* Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (s. 25-42)

Kontrolní otázky

1. Charakterizujte časovou řadu.
2. Uveďte příklady využití analýzy časových řad.
3. Jaké druhy časových řad znáte?
4. Charakterizujte časové řady intervalové.
5. Charakterizujte a uveďte příklady časové řady okamžikové.
6. K čemu slouží klouzavý průměr?
7. Jaký ukazatel je s ohledem na spolehlivost hodnocení časové řady významný?
8. K čemu je výhodný ukazatel diference časové řady?
9. Proč se vyplatí sledovat index růstu?
10. Charakterizujte dělení indexů a stručně je charakterizujte.

Odkaz na praktickou část

3.10 Úvod do analýzy časových řad, složky časových řad

2.11 Modelování časových řad, složky časových řad

Klíčová slova

časové řady, modelování časové řady, složky časové řady

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je seznámit studenty se základními složkami časových řad a ukazatelů jejich průběhu, jejich modelováním.

Výstupy z učení

- 4.1 využívá posloupnosti při řešení matematických problémů
- 4.2 pracuje s časovými řadami, sčítá a analyzuje jejich konvergenci

Abstrakt

Přiblížíme si modelování časových řad. Podrobný výklad najde čtenář ve studijní literatuře na uvedených stranách.

Studijní text

Modelování časových řad

Při hledání nejvhodnějšího typu trendu vycházíme především z předpokládaných vlastností trendové funkce, vyplývajících z teoretického rozboru. Výběr usnadní grafické znázornění časové řady. Kromě toho lze využít testů založených na jednoduchých charakteristikách časové řady. Za základní považujeme jednorozměrný model časové řady ve tvaru

$$y_t = f(t, \beta, \varepsilon_t)$$

kde y_t je hodnota modelovaného ukazatele v čase t, t je časová proměnná, $t = 1, 2, \dots, n$ a ε_t je hodnota náhodné složky v čase t, β je vektorový parametr, jeho hodnoty je třeba odhadnout. Typ funkce f je třeba zvolit nebo vybrat.

Složky časových řad

Klasický (formální) model, kde jde pouze o popis forem pohybu a nikoliv o poznání věcných příčin dynamiky časové řady, vychází z dekompozice řady na čtyři formy (složky) časového pohybu:

1. trendovou, T_t 2. sezónní, S_t 3. cyklickou, C_t 4. náhodnou, ε_t přičemž vlastní tvar rozkladu může být dvojího typu:

a) aditivního

$$y_t = T_t + S_t + C_t + \varepsilon_t = Y_t + \varepsilon_t$$

kde Y_t je teoretická (modelová, systematická, deterministická) složka $T_t + S_t + C_t$,

b) multiplikativního

$$y_t = T_t \cdot S_t \cdot C_t \cdot \varepsilon_t,$$

Tento tvar lze logaritmickou transformací převést snadno na aditivní tvar. (Při jakékoliv transformaci je ovšem nutno dát pozor na rozložení chyb ε_t.)

Souběžná existence všech složek $T_t, S_t, C_t, \varepsilon_t$ však není nutná a je podmíněna věcným charakterem zkoumaného ukazatele.

Trend - trendem rozumíme hlavní tendenci dlouhodobého vývoje hodnot ukazatele v čase. Trend může být rostoucí, klesající nebo se jedná o časovou řadu bez trendu. Může mít také složitější průběh.

Sezónní složka - je pravidelně se opakující odchylka od trendové složky s periodou kratší než jeden rok.

Cyklická složka je kolísání okolo trendu v důsledku dlouhodobého cyklického vývoje s délkou vlny delší než jeden rok. Jedná se o cykly demografické, inovační, plánovací, atd.

Náhodná složka zbývá po vyloučení sezónní a cyklické složky. Jejím zdrojem jsou drobné a v jednotlivostech nepostižitelné příčiny. Její chování lze popsat pravděpodobnostně.

Studijní literatura

Povinná literatura

CIPRA, T., 2008. *Finanční ekonometrie*. Praha: Ekopress. ISBN 978-80-86929-43-9. (s. 257-259)

Doporučená literatura

ARLT, J. a M. ARTLOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (s. 25-42)

Kontrolní otázky

1. Charakterizujte model časové řady.

2. Uveďte příklady využití modelů časových řad.
3. Jaké druhy modelů časových řad znáte?
4. Charakterizujte složky časových řad.
5. Co je to trend časové řady?
6. Charakterizujte sezónní složku časové řady?
7. Charakterizujte důvod sledování cyklické složky časové řady.
8. Doplňte: Demografické křivky lze charakterizovat jako …
9. K čemu slouží náhodná složka časové řady?
10. Lze popsat chování náhodné složky deterministicky?

Odkaz na praktickou část

3.11 Modelování časových řad

2.12 Trendová složka, modely trendových složek

Klíčová slova

časové řady, trend, průběh trendu časové řady

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je seznámit studenty s průběhem časové řady a jednotlivými modely trendových složek časových řad.

Výstupy z učení

- 4.2 pracuje s časovými řadami, sčítá a analyzuje jejich konvergenci

Abstrakt

Přiblížíme si pokročilé pojmy o časových řadách a jejich chování. Podrobný výklad najde čtenář ve studijní literatuře na uvedených stranách.

Studijní text

Trend časové řady

Nejužívanější metodou odhadu parametrů trendových funkcí je metoda nejmenších čtverců, která je použitelná v případě, kdy trendová funkce je lineární v parametrech (jedná se o lineární regresní model).

Lineární trend

Je nejčastěji používaným typem trendové funkce. Můžeme ji použít vždy, chceme-li alespoň orientačně určit základní směr vývoje časové řady a rovněž může sloužit v omezeném časovém intervalu jako vhodná aproximace jiných trendových funkcí.
Má tvar

$$T_t = a_0 + a_1 \cdot t,$$

kde a_0, a_1 jsou parametry a $t = 1,2, \dots, n$ je časová proměnná. K odhadu a_0, a_1 používáme metodu nejmenších čtverců.

Parabolický trend

$$T_t = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2,$$

kde a_0, a_1, a_2 jsou parametry a $t = 1,2, \ldots, n$ je časová proměnná, je poměrně často používaný typ trendové funkce. Je lineární z hlediska parametrů a proto se k jejich odhadu používá metody nejmenších čtverců.

Exponenciální trend

$$T_t = a \cdot b^t,$$

kde $t = 1,2, \ldots, n,\ b > 0$.

Danou rovnici budeme nejprve logaritmovat a pak lze k odhadu parametrů využít metody nejmenších čtverců.

Logistický trend

$$T_t = \frac{y}{1 + a \cdot b^t},$$

kde $t = 1,2, \ldots, n,\ b > 0$

Logistická trendová funkce byla původně odvozena jako křivka vyjadřující biologický růst populací za podmínek omezených zdrojů. V ekonomické oblasti se tato křivka začala používat v modelech poptávky po předmětech dlouhodobé spotřeby a s úspěchem se také používá např. při modelování vývoje, výroby a prodeje některých druhů výrobků. Patří mezi trendové funkce s kladnou horní asymptotou a jedním inflexním bodem. Pole typického průběhu se této skupině křivek říká S-křivky.

Studijní literatura

Povinná literatura

CIPRA, T., 2008. *Finanční ekonometrie.* Praha: Ekopress. ISBN 978-80-86929-43-9. (s. 257-259)

Doporučená literatura

ARLT, J. a M. ARTLOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (s. 25-42)

Kontrolní otázky

1. Charakterizujte co je to trend časové řady.
2. Uveďte příklady využití trendů časových řad.
3. Jaké druhy trendů časových řad znáte?
4. Charakterizujte nejčastěji využívaný trend?
5. Nakreslete lineární trend časové řady.
6. Charakterizujte a nakreslete trend exponenciální?
7. Charakterizujte parabolický trend.
8. K čemu lze využít metody nejmenších čtverců při trendové analýze časové řady?
9. Nakreslete parabolický trend.
10. Charakterizujte logistický trend časové řady.

Odkaz na praktickou část

3.12 Trendová složka, modely trendových složek

2.13 *Využití časových řad k prognózování*

Klíčová slova

časové řady, trend, průběh trendu časové řady, využití časových řad

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je seznámit studenty s vhodností používání a využitím časových řad pro předpovídání a prognózování.

Výstupy z učení

- 4.2 pracuje s časovými řadami, sčítá a analyzuje jejich konvergenci

Abstrakt

Přiblížíme si pokročilé možnosti využití časových řad. Podrobný výklad najde čtenář ve studijní literatuře na uvedených stranách.

Studijní text

Časové řady pracují s chronologicky uspořádanými statistickými daty. Setkáváme se s nimi v různých oblastech života. Stále většího významu však nabývá práce s časovými řadami v ekonomii. Lze konstatovat, že téměř každý řídící pracovník přichází často do kontaktu s časovými řadami ekonomických ukazatelů. Jednou se může zabývat vývojem tržeb, podruhé zas vývojem inflace. Popis ekonomických ukazatelů využitím časových řad je tedy velkým pomocníkem při analýzách vývoje a z toho některých vyplývajících konjunkturních souvislostech a prognózách do budoucnosti.

Hlavní funkce analýzy časových řad pro budoucnost

Objektivní metody používané v prognostické činnosti vycházejí z poznatků statistiky a aplikované matematiky, nebo jsou jejich kombinací. Ze statistických metod se jedná zejména o zkoumání založené na analýze trendových funkcí, modelů časových řad a regresních modelů.

Analýza trendových funkcí

Analýza trendových funkcí - lze ji rozdělit do dvou navazujících etap. První etapou je stanovení trendové funkce. V ekonomických prognózách se jedná zpravidla o neperiodické časové řady s náhodným kolísáním. K jejich vyrovnání se používá řady funkcí, z nichž největšího rozšíření doznaly funkce lineární, mocninný, exponenciální, kvadratický a hyperbolický.

Lineární trendová funkce lze pro její jednoduchost využít pro vyjádření vývoje prognózovaných veličin, jestliže absolutní přírůstky meziročních změn dané proměnné jsou přibližně konstantní a jestliže jsou předpoklady pro obdobný vývoj i vně intervalu napozorovaných hodnot.

Mocninná funkce umožňuje vyjádřit nelineární průběh vývoje prognózovaného jevu, a to jak progresivně, tak degresivně rostoucí anebo klesající. Relativní přírůstky jsou konstantní.

Semilogaritmická funkce se používá zejména v těch případech, kdy rychlý pokles nebo růst příslušné proměnné je následován poklesem nebo růstem pozvolným, který v budoucnu bude znamenat spíše stagnaci.

Exponenciála je vhodnou trendovou funkcí v těch případech, kdy absolutní přírůstky rostou, a vývoj probíhá geometrickou řadou. Poněvadž se hodnota prognózované proměnné s délkou prognostického horizontu výrazně mění, případná extrapolace pro toto období musí být doložena podrobným věcným rozborem. Z těchto důvodů se používá zejména ke krátkodobým nebo střednědobým prognózám.

Kvadratická trendová funkce se s odpovídajícími výsledky používá pro vyjádření základní změny ve vývoji, kdy se pozitivní přírůstky mění v negativní a naopak. Pokud tato změna nenastane, i když v intervalu napozorovaných hodnot může být kvadratická funkce vhodná, případně extrapolace vede k nesprávným nebo ekonomicky bezobsažným výsledkům.

Hyperbolická trendová funkce se při prognózách uplatňuje tehdy, jestliže se průběh časové řady zezdola nebo seshora asymptoticky blíží k určité konstantní hodnotě. V ekonomických prognózách se zpravidla jedná o hodnotu, která udává závislosti na předmětu prognózy.

Studijní literatura

Povinná literatura

CIPRA, T., 2008. *Finanční ekonometrie*. Praha: Ekopress. ISBN 978-80-86929-43-9. (s. 362-376)

Doporučená literatura

ARLT, J. a M. ARTLOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady.* Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (s. 49-69)

Kontrolní otázky

1. Charakterizujte význam prognózování.
2. Jaké spatřujete výhody pro předpověď prostřednictvím analýzy časových řad.
3. Vyjmenujte hlavní funkce analýzy časových řad.
4. K čemu slouží analýza trendových funkcí?
5. Nakreslete hyperbolický trend.
6. V čem spočívá význam semilogaritmická funkce?
7. Jaká trendová funkce je vhodná pro předpověď pro střednědobý horizont?
8. V jakém trendu jsou konstantní přírůstky sledovaného jevu?
9. Nakreslete mocninnou funkci a charakterizujte její význam pro budoucí prognózy.
10. Jaký je význam časových řad pro prognózování?

Odkaz na praktickou část

3.13 Využití časových řad k prognózování

3 Příprava na semináře

3.1 Základní pojmy z finanční matematiky, posloupnosti a řady

Klíčová slova

aritmetická posloupnost, geometrická posloupnost, součet řady, konvergence nekonečné řady

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je seznámit studenty s obecnými číselnými řady, speciálními typy řad ve finanční matematice a s pojmem nekonečné řady a její konvergence.

Výstupy z učení

- 4.1 využívá posloupnosti při řešení matematických problémů

Příklad, uvedení vzorového úkolu

Příklad 1: Odvoďte vzorce pro součet konečné aritmetické řady.

Řešení:

a, členy aritmetické posloupnosti jsou:

a_1

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2 \cdot d$

...

$a_n = a_{n-1} + d = \cdots = a_1 + (n-1) \cdot d$

Hledaný součet proto bude

$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n-1) \cdot d)$

Vhodným uzávorkováním můžeme výraz přepsat jako

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 + \cdots + a_1 + d + 2 \cdot d + \ \ldots + (n-1) \cdot d$$
$$= n \cdot a_1 + d \cdot (1 + 2 + \cdots + n - 1)$$
$$= n \cdot a_1 + d \cdot \big((1 + n - 1) + (2 + n - 2) + \cdots\big) = n \cdot a_1 + d \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1)$$

Příklad 2: Zjistěte, zda je součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ konečné číslo.

Řešení:

Nejdřív zkusíme vypsat několik prvních členů řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Obecně, n-tý člen je ve tvaru $\frac{1}{2^{n-1}}$. Platí přitom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

Tato skutečnost sice nestačí, abychom s určitostí věděli, že hledaný součet je konečný, avšak kdyby $\lim_{n\to\infty} a_n$ nebyla 0, řada by nekonvergovala. S určitostí můžeme říct, že řada konverguje, pokud například

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| < 1$$

Posloupnost má jenom kladné členy, proto absolutní hodnotu můžeme vynechat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2^{n-2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-2}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}$$

Protože uvedená limita je menší než 1, řada konverguje, tj. hledaný součet je konečné číslo. Ponecháme na čtenáři, aby toto číslo zjistil, je zde možno využít geometrickou posloupnost. Tvrzení, že řada určitě konverguje, když

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| < 1,$$

se nazývá *kritérium konvergence*.

Z dalších používaných kritérii uveďme ještě, že řada konverguje, když

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1.$$

Zadání samostatné práce (úkolu)

Příklad 3: Napište prvních pět členů geometrické posloupnosti, je-li dáno:

$a_3 = \sqrt{5}, a_5 = 5.$

Příklad 4: O kolik procent ročně je třeba během deseti let zvyšovat výrobu, aby se za deset let při konstantním procentuálním přírůstku zvýšila dvojnásobně?

Příklad 5: Objem výroby v jistém roce dosáhl 90 jednotek produkce. Při kolika procentním ročním přírůstku se za 4 roky objem produkce zdvojnásobil?

Příklad 6: Současné náklady na produkci určitého výrobku jsou 450 Kč. Za jakou dobu se náklady zmenší na třetinu, pokud každoročně klesnou náklady o 15 %?

Příklad 7: O kolik procent třeba každý rok zvýšit výrobu, aby během pěti let vzrostla o 60 %?

Příklad 8: Mějme nekonečnou posloupnost $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$, ... Jak vypadá posloupnost částečných součtů?

Příklad 9: Je součet $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$ konečné číslo? Jakou má hodnotu?

Příklad 10: Jakou hodnotu má součet $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

Příklad 11: Určete součet řady $1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + \cdots + 100 \cdot \frac{1}{2^{100}}$. Využijte vzorců pro součet aritmetické a geometrické řady.

Příklad 12: V lese je přibližně 75 000 m^3 dřeva. Roční přírůstek se odhaduje na 3%. Na konci každého roku se vykácí 3 500 m^3 dřeva. Vypočtěte, kolik dřeva zůstane v lese

a) po jednom roce

b) po dvou letech

c) po deseti letech.

Studijní literatura

Povinná literatura

DOŠLÁ, Z. a P. LIŠKA, 2014. *Matematika pro nematematické obory.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-5322-5. (s. 143-154)

Doporučená literatura

PROUZA, L., 2007. *Finanční a pojistná matematika*. Praha: Vysoká škola ekonomie a managementu. ISBN 978-80-86730-17-2.

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4.

3.2 Jednoduché úročení, polhůtní, základní rovnice, diskont

Klíčová slova

jednoduché úročení, úroková sazba, diskont, srážková daň

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je připomenout studentům postupy u jednoduchého úročení, seznámit je s rozdíly mezi úročením a bankovním diskontem a s postupem započtení srážkové daně do finančních vzorců.

Výstupy z učení

- 4.3 využívá různé druhy úročení s různou frekvencí

Příklad, uvedení vzorového úkolu

Příklad 1: Na účet s roční úrokovou sazbou 4 % p.a. a pololetním úrokovým obdobím jsme uložili 100 000 Kč. Jakou částku si můžeme vybrat za 2 měsíce, pokud jsou úroky zdaňovány srážkovou sazbou daně z příjmů ve výši 20 %?

Řešení:

Úrokové období je pololetní, to znamená, že jak úroková sazba (i), tak počet úrokových období (τ) musí být tomuto formátu přizpůsobeny. Jelikož jsou rovněž úroky zdaňovány srážkovou sazbou daně z příjmů, je nutno aplikovat čistou úrokovou sazbu.

Úrokové období = pololetí

$\mathrm{i} = 4\ \%\ \mathrm{p.a.} = 2\ \%\ \mathrm{p.s.}$

Vliv zdanění = $0{,}02 \cdot (1 - 0{,}20) = 1{,}60\ \%\ \mathrm{p.s.} = 0{,}016\ \mathrm{p.s.}$

$\tau =$ 2 měsíce = 2/6 pololetí = 1/3 pololetí

$\mathrm{K_0}$= 100 000 Kč

K = ? (Kč)

$$\mathrm{K} = \mathrm{K_0} \cdot (1 + \mathrm{i} \cdot \tau)$$

$$\mathrm{K} = 100\,000 \cdot (1 + 0{,}016 \cdot 1/3)$$

$K = 100\ 533{,}33$ Kč

Za 2 měsíce si můžeme vyzvednout 100 533,33 Kč.

Příklad 2: Stavební firma vydala směnku znějící na částku 1 650 000 Kč se splatností 1. 6. 2011. Obchodní společnost zakoupila tuto směnku 8. 3. 2011 při diskontní sazbě 9,5 % a 5. 4. 2011 směnku prodala při diskontní sazbě 9,3 %. Jaká byla míra zisku pro tuto obchodní společnost?

Řešení:

a) Spočteme nákupní cenu směnky – částku po srážce obchodního diskontu (mezi 8. 3. a 1. 6. uplyne 85 dnů):

$$K_0 = K_N \cdot \left(1 - d \cdot \frac{\tau}{360}\right)$$

$$K_0 = 1\ 650\ 000\ \cdot \left(1 - 0{,}095 \cdot \frac{85}{360}\right) = 1\ 612\ 990\ \text{Kč}$$

b) Spočteme prodejní cenu směnky – částku po srážce obchodního diskontu (mezi 5. 4. a 1. 6. uplyne 57 dnů):

$$K_0 = K_N \cdot \left(1 - d \cdot \frac{\tau}{360}\right)$$

$$K_0 = 1\ 650\ 000\ \cdot \left(1 - 0{,}093 \cdot \frac{57}{360}\right) = 1\ 625\ 704\ \text{Kč}$$

c) Nyní můžeme spočítat míru zisku (míra zisku je pouze jiný název pro roční úrokovou sazbu; mezi 8. 3. a 5. 4. uplyne 28 dnů):

$$K_0 = K_N \cdot (1 + i \cdot n)$$

$$i = \frac{K_N - K_0}{n \cdot K_0}$$

$$n = \frac{\tau}{360}$$

$$i = \frac{1\ 625\ 704 - 1\ 612\ 990}{1\ 612\ 990 \cdot \frac{28}{360}} = 10{,}13\ \%$$

Míra zisku pro obchodní firmu činila 10,13 %.

Zadání samostatné práce (úkolu)

*Příklad 3:*Jakou částku budete vracet bance, jestliže jste si od ní půjčili 55 000 Kč na 6 měsíců při roční úrokové míře 9 %?

Příklad 4: Za kolik dnů vzroste vklad 1 500 Kč na 1 600 Kč při roční úrokové míře 8 % a použitém standardu 1 rok = 360 dní.

Příklad 5: Uložili jste na vkladní knížku u peněžního ústavu 2 000 Kč. Úroková sazba je 4 % p.a. a úroky z vkladu jsou daněny srážkovou daní ve výši 15 %. Jakou částku si můžete vybrat za 3 měsíce?

Příklad 6: Odběratel nezaplatil dodavateli fakturu znějící na 150 000 Kč splatnou 3. 3. 2011. Podle smlouvy má odběratel právo účtovat penále ve výši 0,05 % z fakturované částky za každý den prodlení. Jak velké bude penále 11. 11. 2011?

Příklad 7: Banka nabízí dvě varianty placení úroku u ročního úvěru:
a, Sazba 10 % p.a. splatných při splatnosti úvěru,
b, Sazba 9,5 % p.a. splatných k datu poskytnutí úvěru.
Která varianta je pro dlužníka výhodnější?

Příklad 8: Osoba eskontovala na banku směnku znějící na 50 000 Kč s dobou splatnosti půl roku.

a) Jakou používá banka diskontní sazbu, jestliže osoba za směnku obdržela 45 000 Kč?
b) Jaká byla míra zisku pro banku z této operace? (Použijte $n = \frac{183}{360}$).

Příklad 9: Kolik dnů zbývalo do splatnosti směnky znějící na částku 500 000 Kč, jestliže za ni banka vyplatila částku 490 000 Kč při diskontní sazbě 10 % p.a.

Příklad 10: Určete datum splatnosti směnky znějící na 100 000 Kč, jestliže 10. 9. 2010 došlo k eskontu. Banka vyplatila 99 250 Kč při $d = 0{,}075$ a použila konvenci 30/360.

Příklad 11: Pokladniční poukázka o jmenovité hodnotě JH splatná za 9 měsíců je v aukci upsána s výnosem 5,28 %. Jaká je její cena, jestliže srážková daň z výnosu činí 25 %.

Příklad 12: Jakou diskontní sazbu má směnka znějící na částku 230 000 Kč, je-li aktuální cena 200 000 Kč a zbývá-li jí 10 měsíců do splatnosti?

Studijní literatura

Povinná literatura

PROUZA, L., 2007. *Finanční a pojistná matematika.* Praha: Vysoká škola ekonomie a managementu. ISBN 978-80-86730-17-2. (s. 75-91)

Doporučená literatura

RADOVÁ, J., J. MÁLEK, P. JABLONSKÝ a M. RADA, 2011. *Finanční matematika pro každého – příklady + CD-ROM*. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-3584-9. (s. 17-28)

RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého.* 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3. (s. 7-29)

3.3 Složené úročení, smíšené úročení, úroková sazba, úrok

Klíčová slova

složené úročení, úrokové období, úročitel, efektivní úroková sazba, smíšené úročení

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je připomenout studentům vzorce pro složené úročení, seznámit je s počítáním pro různé délky úrokových období a porovnáváním finančních produktů s různou délkou úrokových období.

Výstupy z učení

- 4.3 využívá různé druhy úročení s různou frekvencí
- 4.4 stanoví efektivní a reálnou úrokovou sazbu

Příklad, uvedení vzorového úkolu

Příklad 1: Kolik let je nutno ponechat peníze na účtu, aby částka 10 000 Kč narostla na 15 000 Kč? Uvažujte pololetní úrokové období, úrokovou sazbu 5 % p. a. a sazbu daně z příjmů 20 %.

Řešení:

Úrokové období je pololetí, to znamená, že je nutno proměnnou (i) tomuto formátu přizpůsobit a proměnná (n) bude vypočtena v pololetích. Proto je nutno ji poté převést do let.

i = 5 % p.a. = 2,5 % p.s.

vliv zdanění = 0,025 · (1 − 0,20) = 0,020 p.s.

n = ? (pololetí)

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^n$$

$$\frac{K_n}{K_0} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^n$$

$$\ln\frac{K_n}{K_0} = \ln\left(1+\frac{i}{m}\right)^n$$

$$\ln K_N - \ln K_0 = n \cdot \ln\left(1+\frac{i}{m}\right)$$

$$n = \frac{\ln K_N - \ln K_0}{\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)} = \frac{\ln 15\,000 - \ln\ 10\,000}{\ln\ (1+0{,}02)}$$

n = 20,48 pololetí = 10,24 let

Peníze na účtu musí ležet 10,24 let.

Příklad 2: Chcete si koupit televizor za 20 000 Kč za 9 měsíců. Kolik musíte dnes uložit, jestliže úroková sazba je 12 % p.a. a úrokové období 6 měsíců?

Řešení:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^n \cdot (1 + i \cdot \tau)$$

$$K_0 = \frac{K_n}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^n \cdot (1 + i \cdot \tau)}$$

$$K_0 = \frac{20000}{\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^n \cdot \left(1 + 0{,}12 \cdot \frac{3}{12}\right)} = 18318{,}37$$

Abychom si mohli za 9 měsíců koupit televizor za 20 000 Kč, musíme dnes složit 18 318 Kč.

Zadání samostatné práce (úkolu)

Příklad 3: Při jaké úrokové sazbě se čtvrtletním připisování úroků se nám za dobu 5 let zúročí částka 50 000 EUR na 70 EUR.

Příklad 4: Který systém splátek je lepší pro věřitele:

a) 5 000 Kč za 4 roky,

b) 1 000 Kč za rok a 3 800 Kč za 4 roky?

Příklad 5: Jaký byl počáteční kapitál a úroková sazba, při které byl uložen, víme-li že po roce byl jeho stav 100 000 Kč a po dvou letech 110 000 Kč. Úrokové období bylo pololetní.

Příklad 6: Vklad ve výši 20 000 000 Kč vzrostl za dva roky na částku 22 900 000 Kč (po zdanění). Úroky byly připisovány jednou ročně, ponechány na účtu a dále spolu s vkladem úročeny. Daň placena srážkou ve výši 15 %. Jakou sazbou je vklad úročen?

Příklad 7: Pavel uložil 50 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3%. Úrokovací období vkladu je 1 den. Jakou částku našetří Pavel za pět let? Přestupnost některého z roků zanedbejte.

Příklad 8: Na kolik se zúročí 20 000 Kč za 8 let a 3 měsíce při úrokové sazbě 12 % p.a. a ročním úročením?

Příklad 9: Jaká je doba splatnosti vypočtená přesně na dny, kdy je potřebná pro zúročení částky 200 000 Kč na 350 000 Kč při smíšeném úročení s roční úrokovou sazbou 7 % p.a. a při ročním připisování úroků?

Příklad 10: Za jakou dobu spočtenou přesně na dni vzroste vklad 120 000 Kč na 140 000 Kč? Banka používá úrokovou sazbu 4 % p.a. s pololetním připisováním úroků.

Příklad 11: Za 7 měsíců byste si chtěli zakoupit horské kolo za 15 000 Kč. Kolik musíte dnes uložit do banky, jestliže nabízí 4 % úrokovou sazbu s pololetním připisováním úroků? Úroky podléhají srážkové dani 15 %.

Studijní literatura

Povinná literatura

PROUZA, L., 2007. *Finanční a pojistná matematika.* Praha: Vysoká škola ekonomie a managementu. ISBN 978-80-86730-17-2. (s. 37-41)

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi*. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4. (s. 57-62)

Doporučená literatura

RADOVÁ, J., J. MÁLEK, P. JABLONSKÝ a M. RADA, 2011. *Finanční matematika pro každého – příklady + CD-ROM.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-3584-9. (s. 42-48)

RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého*. 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3. (s. 29-52)

3.4 *Spoření krátkodobé a dlouhodobé, využití součtu řady*

Klíčová slova

spoření krátkodobé, spoření dlouhodobé, področnost, poplatek za vedení účtu

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je seznámit studenty s výpočty pro případ pravidelných vkladů, poukázat na rozdíly pro případ vkladů 1x nebo vícekrát za úrokové období a ukázat, proč tyto rozdíly vznikají.

Výstupy z učení

- 4.1 využívá posloupnosti při řešení matematických problémů
- 4.5 vypočítá současnou a budoucí hodnotu anuity, sestaví umořovací schéma dluhu
- 4.7 ocení dluhopisy, akcie a pracuje s měnovými kurzy

Příklad, uvedení vzorového úkolu

Příklad 1: Jaká bude naspořená částka na konci roku, jestliže ukládáme měsíčně 800 Kč při úrokové sazbě 4,6 % p.a., a to

a) počátkem každého měsíce,

b) koncem každého měsíce?

Řešení:

Za jedno úrokové období (v tomto případě 1 rok) uložíme 12 úložek ($\Rightarrow m = 12$). Protože spoříme pouze v rámci jednoho úrokového období (rok), jde o krátkodobé spoření:

a) ukládáme počátkem měsíce, jedná se proto o předlhůtní spoření

$$S = m \cdot X \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} \cdot i\right)$$

$$S = 12 \cdot 800 \cdot \left(1 + \frac{12+1}{24} \cdot 0.046\right) = 9839.2$$

b) ukládáme koncem měsíce, jedná se proto o polhůtní spoření;

$$S = m \cdot X \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot i\right)$$

$$S = 12 \cdot 800 \cdot \left(1 + \frac{12 - 1}{24} \cdot 0.046\right) = 9802.4$$

Při předlhůtním spoření uspoříme za rok 9 839,20 Kč, při polhůtním pouze 9 802,40 Kč.

Příklad 2: Kolik uspoříme za tři roky, budeme-li ukládat na počátku každého roku 15 000 Kč při neměnné 2,4 % sazbě p.a. a ročním připisování úroků? Od poplatků a daně z úroků abstrahujme.

Řešení:

Využijeme vzoreček pro předlhůtní dlouhodobé spoření:

$$S = a \cdot (1 + i) \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$S = 15\,000 \cdot (1 + 0{,}024) \cdot \frac{(1 + 0{,}024)^3 - 1}{0.024} = 47\,194{,}8$$

Za tři roky našeho spoření uspoříme 47 194,80 Kč.

Zadání samostatné práce (úkolu)

Příklad 3: Kolik uspoříme včetně úroků do konce roku, ukládáme-li od 1.1. tohoto roku na začátku měsíce 1.500 Kč při úrokové sazbě 2 % p.a.?

Příklad 4: Na konci každého měsíce ukládáme na spořicí účet 2 000 Kč, úroková sazba je 2 % p.a. Kolik budeme mít na konci roku na účtu naspořeno?

Příklad 5: Kolik musíme na začátku každého měsíce ukládat, abychom při úrokové míře 5 % p.a. měli na konci roku naspořeno 50 000 Kč?

Příklad 6: Kolik musíme spořit na počátku každého měsíce, abychom za rok našetřili 25 000 Kč při úrokové sazbě 2,1 % p.a.? Předpokládejme roční úrokové období. Dále uvažujme daň z úroků ve výši 15 %.

Příklad 7: Kolik budeme mít naspořeno za 6 měsíců, pokud ukládáme vždy na konci měsíce 1000 Kč při úrokové míře 6 % p.a. a čtvrtletním připisováním úroků?

Příklad 8: Kolik uspoříme za tři roky, spoříme-li začátkem každého měsíce 1 500,- Kč při neměnné 2 % roční úrokové sazbě? Předpokládejme roční úrokové období. Dále uvažujme daň z úroků ve výši 15 %.

Příklad 9: Kolik musíme spořit počátkem každého čtvrtletí, abychom za pět let uspořili částku 450 000 Kč při neměnné roční úrokové sazbě 1,5 % a ročním připisováním úroků? Předpokládejme daň z úroků ve výši 15 %.

Příklad 10: Za šest let plánujeme nákup nového automobilu. Značka, kterou jsme si vybrali, má podle vývoje cen stát v té době 580 000 Kč. Kolik musíme spořit na počátku každého roku, abychom za šest let uspořili 580 000 Kč? Úspory dáváme na účet úročený sazbou 2,6 % p.a. s měsíčním připisováním úroků. Předpokládejme daň z úroků ve výši 15 %.

Příklad 11: Spoříme 10 let vždy koncem měsíce 1 000 Kč při 7 % p.a. a pololetním připisování úroků. Jaká bude naspořená částka, když banka strhává na začátku každého čtvrtletí poplatek ve výši 100 Kč a úroky jsou zdaněny srážkou u zdroje ve výši 15 %.

Příklad 12: Kolik peněz jsme měli uloženo na účtu k 1. 1. 2001, jestliže na konci roku 2008 budeme disponovat částkou 2 350 000 Kč? Účet je úročen úrokovou sazbou 7,4 % p.a. s ročním připisováním úroků a vždy počátkem měsíce ukládáme pravidelně 5 000 Kč. Úroky jsou daněny 15 % srážkovou daní.

Studijní literatura

Povinná literatura

PROUZA, L., 2007. *Finanční a pojistná matematika.* Praha: Vysoká škola ekonomie a managementu. ISBN 978-80-86730-17-2. (s. 66-75)

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4. (s. 63-84)

Doporučená literatura

RADOVÁ, J., J. MÁLEK, P. JABLONSKÝ a M. RADA, 2011. *Finanční matematika pro každého – příklady + CD-ROM.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-3584-9. (s. 71-88)

RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého.* 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3. (s. 71-88)

3.5 *Důchody, úvěr, splácení úvěru, úmor*

Klíčová slova

důchod, anuita, úmor, poplatek za vedení účtu

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je seznámit studenty s výpočty pro současnou hodnotu příštích výplat, ukázat podobnosti a rozdíly oproti případu pravidelných vkladů, a ukázat podobnosti a rozdíly s případem splácení dluhu.

Výstupy z učení

- 4.5 vypočítá současnou a budoucí hodnotu anuity, sestaví umořovací schéma dluhu

Příklad, uvedení vzorového úkolu

Příklad 1: Jaká částka nám zajistí důchod 7 000 Kč vyplácený na začátku každého roku po dobu 12 let při úrokové sazbě 3,5% p.a. s ročním připisováním úroků?

Řešení:

Hledáme současnou hodnotu budoucích plateb. Platby budou vypláceny pouze 1x za úrokové období, postačí proto použít dlouhodobý vzorec (popř. do složitějšího tvaru dosadit $\mathrm{m} = 1$). Zadání abstrahuje od poplatků, tudíž od nich také abstrahujeme.

$$\mathrm{D} = \mathrm{a} \cdot (1 + \mathrm{i}) \cdot \frac{1 - \mathrm{v}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}$$

$$\mathrm{D} = 7000 \cdot (1 + 0.035) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + 0.035}\right)^{12}}{0.035}$$

Současná hodnota důchodu je 70 011 Kč.

Příklad 2: Pan Novák si při koupi bytu půjčil na hypoteční úvěr 1 000 000 Kč. Banka úvěr poskytla na 25 let, s roční úrokovou mírou fixovanou na celou dobu splácení na 5,7 % a měsíčním úrokovým obdobím. Úvěr je splácen formou měsíčních splátek, první po měsíci od jeho poskytnutí, poslední po uplynutí 25 let. Určete výšku jedné splátky. (Abstrahujte od poplatků.)

Řešení:

Během 25 let bude splaceno $25 \cdot 12 = 300$ splátek. Roční úrokovou míru musíme přepočítat na jeden měsíc:

$$\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}} = \frac{0{,}057}{12} = 0{,}00475$$

Můžeme využít budoucí hodnotu všech plateb – v okamžiku splacení poslední splátky platí:

$$\mathrm{D} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right)^{300} = \mathrm{a} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right)^{299} + \mathrm{a} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right)^{298} + \cdots + \mathrm{a} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right)^{1} + \mathrm{a}$$

$$\mathrm{D} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right)^{300} = \mathrm{a} \cdot \left(\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right)^{299} + \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right)^{298} + \cdots + \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right)^{1} + 1\right)$$

$$\mathrm{D} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right)^{300} = \mathrm{a} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right)^{300} - 1}{\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right) - 1} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{m} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right)^{300} - 1}{\mathrm{i}}$$

Po dosazení dostáváme:

$$1\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}00475)^{300} = \mathrm{a} \cdot 12 \cdot \frac{(1 + 0{,}00475)^{300} - 1}{0{,}057}$$

Odtud vychází $\mathrm{a} = 6\,260{,}90\mathrm{K}č$.

Příklad 3: Jak vypadá úmor během 1. roku u příkladu 1 z předešlé kapitoly? Jaký je zůstatek dluhu po 12 splátkách?

Pan Novák si při koupi bytu půjčil na hypotéční úvěr 1 000 000 Kč. Banka úvěr poskytla na 25 let, s roční úrokovou mírou fixovanou na celou dobu splácení na 5,7 % a měsíčním úrokovým obdobím. Úvěr je splácen formou měsíčních splátek, první po měsíci od jeho poskytnutí, poslední po uplynutí 25 let. Určete výšku jedné splátky. (Abstrahujte od poplatků.)

Řešení:

Z předchozího řešení již víme, že splátka vychází $a = 6\,260{,}90$ Kč. Pro úmor v každém období platí

$M_r = a \cdot v^{n-r+1}$

V 1. měsíci byl proto úmor

$$M_r = a \cdot v^{300-1+1} = a \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{i}{m}}\right)^{300-1+1} = 6260{,}90 \cdot \left(\frac{1}{1+0{,}00475}\right)^{300} = 1\,510{,}89\text{Kč}$$

Úmor se v každém měsíci o něco zvyšuje, ve 12. měsíci dosáhne hodnotu 1591,73Kč. Zůstatek dluhu můžeme počítat postupně po každé splátce (zkuste to s pomocí Excelu vypočítat). Druhá možnost je využít vzorec

$$D_r = a \cdot \frac{1-v^{n-r}}{\frac{i}{m}}$$

Odkud

$$D_{12} = 6\,260{,}90 \cdot \frac{1-v^{289}}{0{,}00475} = 982\,982{,}33\text{Kč}.$$

Za 1. rok tedy bylo splacenou asi 17 000Kč z původního dluhu.

Zadání samostatné práce (úkolu)

Příklad 4: Kolik jsme museli naspořit, jestli-že si nyní chceme nechat z naspořené částky vyplácet měsíčně polhůtně důchod ve výši 5 900 Kč po dobu 15 let? Úroková sazbu 4,8 % p.a. se čtvrtletním připisováním úroků, úroky jsou zdaněny 15 % srážkovou daní.

Příklad 5: Jak vysoká dnes složená částka nám zajistí výplatu věčného předlhůtního důchodu ročního ve výši 10 000 Kč od pětašedesáti let věku, je-li nám dnes třicet jedna a uvažujeme neměnnou úrokovou sazbu 5 % p.a.?

Příklad 6: Absolvent VŠE chce začít ve 25 letech spořit na důchod (65). V důchodu si chce nechat vyplácet po dobu 15 let měsíčně polhůtně 10 000 Kč s růstem výše této platby vždy o 0,2% oproti předchozímu měsíci. Kolik musí spořit na konci každého měsíce, pokud po celou dobu spoření i vyplácení důchodu bude účet úročen roční úrokovou sazbou 6 % s měsíčním připisováním úroků a z úroků bude strhávána srážková daň 15 %?

Příklad 7: Řešte předchozí příklad pomocí současné hodnoty příštích plateb.

Příklad 8: Určete v předchozím příkladu, jak by se splátky hypotéky změnily, jestliže by se doba splatnosti prodloužila na 30 let.

Příklad 9: Banka poskytla podnikateli koncem roku 2007 úvěr na 10 let ve výši 1 000 000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 15 % (úrokovací období je jeden rok) a podnikatel ho má splatit v deseti stejných splátkách vždy na konci roku. Určete výši jedné splátky. Kolik peněz zaplatí podnikatel na úrocích?

Příklad 10: Manželé Lošákovi si na koupi automobilu rozhodli vzít spotřebitelský úvěr ve výši 300 000 Kč. Úvěrová společnost jim nabídla půjčku za následujících podmínek: měsíčně po dobu 10 let budou splácet 3 000 Kč, za vedení účtu společnosti zaplatí 60 Kč měsíčně, za schválení žádosti 0,9 % z vypůjčené částky, přičemž minimální výše poplatku za schválení úvěru je 2800 Kč. Kolik zaplatí Lošákovi navíc na úrocích a poplatcích? Kolik celkově zaplatí manželé za tento úvěr?

Příklad 11: Spočtete úmor v prvním a posledním období u příkladů z minulé kapitoly.

Příklad 12: Banka poskytla podnikateli koncem roku 2007 úvěr na 10 let ve výši 1 000 000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 15 % (úrokovací období je jeden rok) a podnikatel ho má splatit v deseti splátkách vždy na konci roku, tak, aby úmor byl v každém roku stejný. Určete výši splátek. Kolik peněz zaplatí podnikatel na úrocích?

Studijní literatura

Povinná literatura

PROUZA, L., 2007. *Finanční a pojistná matematika*. Praha: Vysoká škola ekonomie a managementu. ISBN 978-80-86730-17-2. (s. 91-101)

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4. (s. 121-146)

Doporučená literatura

RADOVÁ, J., J. MÁLEK, P. JABLONSKÝ a M. RADA, 2011. *Finanční matematika pro každého – příklady + CD-ROM.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-3584-9. (s. 109-131)

RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého.* 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3. (s. 89-131)

3.6 Směnky a směnečné obchody, hypoteční a spotřebitelské úvěry

Klíčová slova

Směnka, skonto, úvěr, forfaiting, faktoring, leasing

Cíle kapitoly

Student získá znalosti v oblasti jednotlivých úvěrů a leasingu. Je schopen si stanovit jednotlivé výše splátek. Dokáže posoudit, zda jaké formy financování jsou pro něj nejvýhodnější. Na základě studia je schopen sestavit platnou směnku.

Výstupy z učení

- 4.5 vypočítá současnou a budoucí hodnotu anuity, sestaví umořovací schéma dluhu

Příklad, uvedení vzorového úkolu

Příklad 1: Firma odprodala dne 2. 9. 2017 směnku bance, znějící na částku 150 000 Kč, se splatností 2. 10. 2017. Jaká byla při diskontní sazbě 10 % p.a. částka, kterou banka firmě vyplatila?

Řešení:

Diskontovanou směnečnou částku, kterou banka firmě vyplatí, určíme podle vzorce

$$\mathrm{Sč_D} = \mathrm{Sč_D} - \mathrm{D_{ob}} = \mathrm{Sč_D} \cdot \left(1 - \frac{\mathrm{t_z} - \mathrm{P_D}}{36\,000}\right)$$

$\mathrm{D_{ob}}$ je výše obchodního diskontu směnky;

Sč je směnečná částka;

$\mathrm{t_z}$ je zbytková doba do splatnosti směnky ve dnech;

$\mathrm{P_D}$ je diskontní sazba v p.a.

$$\mathrm{Sč_D} = 150\,000 \cdot \left(1 - \frac{30 \cdot 10}{36\,000}\right) = 148\,750$$

Banka vyplatí klientovi částku 148 750 Kč.

Příklad 2: Prodávající firma dodala zboží v celkové prodejní ceně 200 000 Kč. Částka je splatná do čtyř týdnů, přičemž při zaplacení do jednoho týdne nabízí prodávající firma možnost skonta ve výši 2 % z prodejní ceny. V případě okamžitého zaplacení by musela kupující firma nákup financovat krátkodobým úvěrem, úroková sazba činí 12 % p.a. Je pro kupující firmu za daných podmínek výhodné využít skonta a zaplatit zboží do týdne či nikoliv?

Řešení:

Absolutní výši skonta určíme podle vzorce:

$$\mathrm{Sk} = \frac{\mathrm{r_{sk}} \cdot \mathrm{PC}}{100} = \frac{2 \cdot 200\,000}{100} = 4\,000$$

Výše úroků u z potencionálního úvěru použitého na okamžité zaplacení do sedmi dnů zjistíme:

$$\mathrm{U} = \frac{(\mathrm{PC} - \mathrm{Sk}) \cdot \mathrm{t} \cdot \mathrm{p}}{360 \cdot 100} = \frac{(200\,000 - 4\,000) \cdot 21 \cdot 12}{360 \cdot 100} = 1\,372$$

Protože je absolutní výše skonta vyšší než úroky z alternativního úvěrového financování, je okamžité zaplacení při využití skonta a refinancování úvěrem výhodnější než odložené zaplacení plné ceny.

Shodný výsledek dostaneme i při přepočtu skonta na relativní roční bázi a jeho porovnání s úrokovou sazbou z úvěru. Skonto na relativní roční bázi vypočítáme:

$$\mathrm{P_{sk}} = \frac{\mathrm{Sk} \cdot 100 \cdot 360}{(\mathrm{PC} - \mathrm{Sk}) \cdot \mathrm{t}} = \frac{4\,000 \cdot 100 \cdot 360}{(200\,000 - 4\,000) \cdot 21} = 34{,}99\ \%$$

Příklad 3: Porovnejte z hlediska klienta dvě varianty spotřebitelských úvěrů a rozhodněte, která pro něj bude výhodnější. V obou případech se jedná o úvěr ve výši 100 000 Kč jednorázově čerpaný se splatností 1 rok.

1. Varianta – za sjednání úvěru si banka účtuje poplatek 500 Kč (splatný při sjednání smlouvy), úvěr je splatný během jednoho roku ve čtyřech pravidelných čtvrtletních splátkách ve výši 27 000 Kč.

2. Varianta – za sjednání úvěru banka neúčtuje žádný poplatek, úvěr je splatný během jednoho roku ve dvanácti pravidelných měsíčních splátkách ve výši 9 000 Kč.

Řešení:

Výhodnost určíme na základě porovnání roční průměrné sazby nákladů u obou variant. Pro 1. variantu počítáme:

$$\frac{100\,000}{(1+\mathrm{i})^{0}}=\frac{500}{(1+\mathrm{i})^{0}}+\frac{27\,000}{(1+\mathrm{i})^{1/4}}+\frac{27\,000}{(1+\mathrm{i})^{2/4}}+\frac{27\,000}{(1+\mathrm{i})^{3/4}}+\frac{27\,000}{(1+\mathrm{i})^{4/4}}$$

Tato rovnice je splněna při úrokové sazbě $\mathrm{i} = 0{,}1321$, tedy RPSN je 13,21%.

Podobně pro 2. variantu počítáme:

$$\frac{100\,000}{(1+\mathrm{i})^{0}}=\frac{9\,000}{(1+\mathrm{i})^{1/12}}+\frac{9\,000}{(1+\mathrm{i})^{2/12}}+\frac{9\,000}{(1+\mathrm{i})^{3/12}}+\frac{9\,000}{(1+\mathrm{i})^{4/12}}$$

Tato rovnice je splněna při úrokové sazbě $\mathrm{i} = 0{,}1545$, tedy RPSN je 15,45%.

Příklad 4: Forfaitér odkupuje dne 12. dubna 2007 od svého klienta pohledávku za následujících podmínek: splatnost pohledávky je 11. dubna 2008, metodou diskontu je straight discount annually, diskontní sazba činí 6 % p.a., grace days je sedm dnů, úroková metoda 365/360, výše pohledávky činí 172 500 euro. Jaká bude částka vyplacená forfaitérem při odkupu pohledávky.

Řešení:

Výši diskontu vypočítáme dle vztahu:

$$\mathrm{D_{SD}}=\frac{\mathrm{NH}\cdot(\mathrm{t}+\mathrm{t_{GD}})\cdot \mathrm{P_D}}{100\cdot 360}=\frac{172\,500\cdot(365+5)\cdot 6}{100\cdot 360}=10\,637$$

Částku, kterou foifaitér vyplatí, získáme odečtením diskontu od nominální hodnoty pohledávky:

$\mathrm{DH} = \mathrm{NH} - \mathrm{D_{SD}} = 172\,500 - 10\,637 = 161\,863.$

Zadání samostatné práce (úkolu)

Příklad 5: Vypočítejte, kolik dostane vyplaceno klient, jemuž banka eskontuje směnku s nominální hodnotou 100 000 Kč 35 dní před dobou splatnosti při diskontní sazbě 12 % p.a.

Příklad 6: Dodavatel se dohodl s odběratelem, že mu dodá technologické zařízení za 1 mil. Kč na roční obchodní úvěr, krytý směnkou. Dodavatel (majitel směnky) tuto směnku eskontuje u banky, banka požaduje roční diskontní sazbu 12 % p.a. Jakou výši eskontovaného úvěru dodavatel obdrží, jestliže směnku eskontuje: a) ihned? b) po 8 měsících?

Příklad 7: Firma eskontovala dne 8. 9. 2007 na banku směnku na částku 115 000 Kč se splatností 6. 12. 2007. Jaká byla při diskontní sazbě 6 % p.a. výše částky, kterou banka firmě připsala dne 8. 9. 2007 na účet za eskontovanou směnku?

Příklad 8: Prodávající dodává zboží v ceně 20 000 Kč, částka je splatná do čtyř týdnů. Při zaplacení do jednoho týdne poskytuje prodávající skonto 2 % z ceny. Úroková sazba činí 12 %. Vypočítejte, zda se kupujícímu vyplatí zaplatit dříve.

Příklad 9: Platební podmínky pro dodávky zboží jsou mezi výrobcem a obchodním podnikem dojednány tak, že platba za zboží se uskuteční do 36 dnů netto pokladna a pokud je účet vyrovnán do 8 dnů, bude dodavatelem poskytnuta sleva (skonto) 2 %. Pozn.: Netto pokladna = zaplatit stanovenou cenu zboží v účtované částce.
a) Zjistěte ekvivalentní úrokovou sazbu v případě, že odběratel využije tzv. placení na cíl (zaplatí tedy do stanovené lhůty splatnosti).
b) Jak dalece je výhodné pro odběratele platit účty (faktury) až po 46 dnech (dodavatel reaguje totiž na nezaplacené účty – faktury až 10 dnů po termínu splatnosti).

Příklad 10: Žadatel mladší 36 let chce získat hypoteční úvěr na koupi rodinného domu s jednou bytovou jednotkou, jehož cena je 2 500 000 Kč. Jakou částku mu banka poskytne? Jak vysoké budou měsíční anuity při úrokové sazbě 5 %p.a., počítá-li, že úvěr splatí za 15 let. Jak vysoké budou anuity v případě poskytnutí státní podpory?

Příklad 11: Rodina Zochova bude potřebovat na rekonstrukci chalupy 750 000 Kč. Úřednice jim nabídla 2 možnosti – hypoteční úvěr a americkou hypotéku. Hypoteční úvěr by spláceli 20 let při úroku 4,89 % p.a. a měsíční splátce 4 904 Kč, poplatek za schválení úvěru je 0,9 % z vypůjčené částky (minimálně 6 000,- Kč, maximálně 25 000 Kč), poplatek za vedení účtu 100 Kč/měsíc. 5 300 Kč zaplatí za odhad tržní ceny bytu a každoročně 2 800 Kč za pojištění bytu. Americkou hypotéku by spláceli 10 let při úroku 4,39 % p.a. a měsíční splátce 7 733 Kč, poplatek za schválení úvěru je 0,87 % z vypůjčené částky (minimálně 10 000 Kč, maximálně 35 000 Kč), poplatek za vedení účtu 150 Kč/měsíc. Částku 3 100 Kč zaplatí za odhad tržní ceny bytu a každoročně 4 300 Kč za pojištění bytu. Vypočítejte, na kolik vyjde rekonstrukce v případě klasického hypotečního úvěru a americké hypotéky. Pokud mohou Zochovi využít daňovou úsporu, vypočítejte, jaká bude její výše?

Příklad 12: Novomanželé Balouškovi se rozhodli zrekonstruovat kuchyni, aby si mohli pořídit i nové elektrospotřebiče, musí si půjčit 30 000 Kč. Úvěrová společnost jim nabídla půjčku za následujících podmínek: měsíčně po dobu 3 let budou splácet 970 Kč, za vedení účtu společnosti zaplatí 70 Kč měsíčně, za schválení žádosti 0,9 % z vypůjčené částky, přičemž minimální výše poplatku za schválení úvěru je 350 Kč. Jakou částku navíc zaplatí Balouškovi bance?

Příklad 13: Forfaitér odkupuje dne 12. dubna 2007 od svého klienta pohledávku za následujících podmínek: splatnost pohledávky je 11. dubna 2008, metodou diskontu je discount to yield , diskontní sazba činí 6% p.a., grace days je sedm dnů, úroková metoda 365/360, výše pohledávky činí 172 500 euro. Jaká bude částka vyplacená forfaitérem při odkupu pohledávky.

Příklad 14: Společnost se zaobírá dodávkou zboží do obchodních řetězců. Na základě smlouvy, dodavatel vystavuje faktury se splatností 60 dní.
Klient vystaví fakturu na 100 000 SKK. Po předložení faktury spolu se standardními podklady na odkup, klientovi je zpravidla do 24 hodin na účet připsaná záloha ve výši 80 % z hodnoty faktury, snížený o zpracovatelský poplatek a úroky v dohodnuté výši. Zpracovatelský poplatek činí 0.5 % z hodnoty faktury a úroky 5 % p.a. z financované časti.

Příklad 15: Leasingová společnost uzavřela s nájemcem finanční leasing na dobu 4 let na stroj v pořizovací ceně 1 000 000 Kč, přičemž dodavatel vyžaduje zálohu ve výši 300 000 Kč 3 měsíce před dodáním stroje. Rekapitalizační procento činí 12 %. Leasingová společnost používá na refinancování celého případu úvěr od banky s úrokovou sazbou 18 % ročně a zároveň požaduje leasingovou marži ve výši 12 %. Odkupní cena na konci leasingu se předpokládá nulová. Vypočítejte výši leasingové splátky a leasingový koeficient, jestliže:
a) uvažujeme pravidelné roční splátky na konci období
b) uvažujeme pravidelné roční splátky na začátku období
c) v případě č. 2 má být první splátka zvýšená o 30 % ceny stroje po rekapitalizaci, přičemž navýšení se nepromítá do leasingového úročení
d) v případě č. 1 uvažujeme měsíční splátky

Příklad 16: Leasingová společnost pořídila strojní linku za 14 500 Kč, ostatní náklady spojené s pořízením byly 421 Kč. Doba životnosti linky je 3 roky. Strojní linku pronajala na 3 roky formou finančního leasingu. Pravidelné roční splátky jsou 6 000 Kč. Nepředpokládá se nezaručená zbytková hodnota.

Studijní literatura

Povinná literatura

PROUZA, L., 2007. *Finanční a pojistná matematika.* Praha: Vysoká škola ekonomie a managementu. ISBN 978-80-86730-17-2. (s. 75-91)

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4. (s. 171-188)

Doporučená literatura

EPPING, R. CH., 2004. *Průvodce globální ekonomikou.* Praha: Portál. ISBN 978-80-7178-825-6.

RADOVÁ, J., J. MÁLEK, P. JABLONSKÝ a M. RADA, 2011. *Finanční matematika pro každého – příklady + CD-ROM.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-3584-9. (s. 152-201)

RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého.* 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3. (s. 152-201)

3.7 Oceňování dluhopisů

Klíčová slova

dluhopis, vnitřní hodnota dluhopisu, rendita, durace dluhopisu

Cíle kapitoly

Student získá znalosti v oblasti oceňování různých typů dluhopisů pomocí vnitřní hodnoty, výnosnosti dluhopisu, citlivosti vnitřní hodnoty na požadovanou výnosnost.

Výstupy z učení

- 4.7 ocení dluhopisy, akcie a pracuje s měnovými kurzy
- 4.8 provádí analýzu citlivosti cen dluhopisů na změnu úrokové míry (durace, konvexita)

Příklad, uvedení vzorového úkolu

Příklad 1: Kupónový dluhopis o nominální hodnotě 15 000 Kč s pololetními kupónovými platbami a kupónovou sazbou 8 % byl vydán 1. 4. 2007. Doba splatnosti je 7 let, roční výnos do splatnosti činí 9,6 %. Jaká je jeho vnitřní hodnota v době emise?

Řešení:

Vnitřní hodnotu zjistíme jako současnou hodnotu budoucích plateb. Dluhopis přináší dva typy plateb:

1, jmenovitá hodnota $\mathrm{JH} = 15\ 000\mathrm{Kč}$ bude vyplacena o 7 let,

2, dluhopis přináší kupónovou platbu $\mathrm{C} = 8\ \%\ \mathrm{JH}$ každého půl roku.

Vnitřní hodnotu dluhopisu stanovíme jako

$$\mathrm{VH} = \mathrm{JH} \cdot \frac{1}{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}} + \mathrm{C} \cdot \frac{1-\mathrm{v}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}$$

Protože kupónová platba je vyplácena půlročně, budeme i v předchozím vzorci uvažovat půlroční „připisování úroků“ (uvědomte si, že to je jenom přirovnání na základě matematické podobnosti). Proto tedy

$$VH = JH \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2\cdot n}} + C \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+\frac{i}{2}}\right)^{2\cdot n}}{\frac{i}{2}}$$

$$VH = 15\,000 \cdot \frac{1}{(1+0{,}048)^{14}} + 1\,200 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+0{,}048}\right)^{14}}{0{,}048} = 19\,812{,}69 \text{ Kč.}$$

Pokud požadujeme výnosnost do doby splatnosti na úrovni 9,6 %, jsme ochotni zaplatit za dluhopis maximálně 19 812,69 Kč.

Příklad 2: Jaká bude durace u řešeného příkladu z předchozí kapitoly? Odhadněte pomocí durace změnu vnitřní hodnoty dluhopisu při nárůstu výnosnosti o 0,5 bps.

Řešení:

Duraci určíme podle vzorce

$$D_M = \frac{JH \cdot n \cdot v^n + C \cdot (1 \cdot v + 2 \cdot v^2 + \cdots + n \cdot v^n)}{JH \cdot v^n + C \cdot (v + v^2 + \cdots + v^n)}$$

znovu využijeme půlroční „úročení“, protože to bude vést k nejjednodušším výpočtům.

$$D_M = \frac{15\,000 \cdot 14 \cdot \left(\frac{1}{1{,}048}\right)^{14} + 1\,200 \cdot \left(1 \cdot \left(\frac{1}{1{,}048}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{1{,}048}\right)^{2} + \cdots + 14 \cdot \left(\frac{1}{1{,}048}\right)^{14}\right)}{15\,000 \cdot \left(\frac{1}{1{,}048}\right)^{14} + 1\,200 \cdot \left(\left(\frac{1}{1{,}048}\right) + \left(\frac{1}{1{,}048}\right)^{2} + \cdots + \left(\frac{1}{1{,}048}\right)^{14}\right)}$$

$$D_M = \frac{15\,000 \cdot 14 \cdot \left(\frac{1}{1{,}048}\right)^{14} + 1\,200 \cdot \left(1 \cdot \left(\frac{1}{1{,}048}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{1{,}048}\right)^{2} + \cdots + 14 \cdot \left(\frac{1}{1{,}048}\right)^{14}\right)}{15\,000 \cdot \left(\frac{1}{1{,}048}\right)^{14} + 1\,200 \cdot \left(\frac{1}{1{,}048} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}048}\right)^{14} - 1}{\frac{1}{1{,}048} - 1}\right)}$$

$$D_M = 9{,}593$$

Při nárůstu výnosnosti o 0,5bps se vnitřní hodnota změní o

$$\Delta VH \approx -D_M \cdot \frac{P}{1+i} \cdot \Delta i = -9{,}593 \cdot \frac{15\,000}{1{,}048} \cdot 0{,}005 = -686{,}55 \text{ Kč.}$$

Znaménko naznačuje, že vnitřní hodnota dluhopisu klesne (to není neočekávatelné, dluhopis přinese určité již dané platby v budoucnu a my zde počítáme současnou hodnotu těchto plateb).

Příklad 3: Investor může investovat do dvou typů dluhopisů:

a) kupónový dluhopis se jmenovitou hodnotou 100 Kč, kupónovou sazbou 12 %, kupónem vypláceným pololetně a dobou do splatnosti 3 roky,

b) diskontovaný dluhopis se jmenovitou hodnotou 100 Kč a dobou do splatnosti 5 let.

Požadovaná výnosnost je 12 % p.a. Jaké doporučíte složení portfolia, pokud chce investovat v časovém horizontu čtyři roky a zabezpečit se proti změně úrokové sazby?

Řešení:

Spočteme durace obou typů dluhopisu

$$D_M = \frac{JH \cdot n \cdot v^n + C \cdot (1 \cdot v + 2 \cdot v^2 + \cdots + n \cdot v^n)}{JH \cdot v^n + C \cdot (v + v^2 + \cdots + v^n)}$$

a, $D_M = \frac{100 \cdot 6 \cdot \frac{1}{1{,}06^6} + 6 \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{1.06} + 2 \cdot \frac{1}{1.06^2} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{1.06^6}\right)}{100} = 5{,}21 \text{ pololetí} = 2{,}61 \text{ roku}$

b, $D_M = n = 5$ let

Namícháme portfolio z těchto dvou dluhopisů tak, aby platilo, že durace celého portfolia je 4 roky:

$4 = V_1 \cdot 2{,}61 + V_2 \cdot 5$

Protože musí platit $V_2 = 1 - V_1$, snadno zjistíme, že váhy dluhopisů v portfoliu budou $V_1 = 42\ \%, V_2 = 58\ \%$.

Zadání samostatné práce (úkolu)

Příklad 4: Jakou nejvyšší sumu byste byli ochotni zaplatit za dluhopis z předešlého příkladu, pokud požadujete výnosnost

a) 11 %

b) 8 %.

Pokuste se tyto sumy nejdřív odhadnout.

Příklad 5: Paní Chalupová koupila dne 13. prosince 2007 kupónový dluhopis o nominální hodnotě 10 000 Kč, který byl emitován13.října 2006 s dobou splatnosti 6 let. Kupónové platby se uskutečňují čtvrtletně (1. kupón vyplacen 13. ledna 2007), datum ex-kupón je 8.

ledna 2008, kupónová sazba činí 10 %, efektivní úroková míra je 8,5 %. Určete spravedlivou kótovanou a hrubou cenu ke dni koupě.

Příklad 6: Dluhopis s nominální hodnotou 13 000 Kč má dobu splatnosti 6 let. Cena k datu emise je 14 000 Kč. Kupónové platby jsou prováděny pololetně s roční sazbou 7 %. Určete roční výnos do splatnosti.

Příklad 7: Pokuste se odhad změny vnitřní hodnoty u minulého příkladu dále zlepšit využitím konvexity. (Použijte Excel pro výpočet součtů v čitateli a jmenovateli zlomků.)

Příklad 8: Jaká bude durace u dluhopisu z předešlého příkladu, pokud požadujete výnosnost
a) 11 %,
b) 8 %.
Pokuste se tyto hodnoty nejdřív odhadnout.

Příklad 9: Mějme kupónovou obligaci o nominální hodnotě 15 000 Kč. Doba splatnosti je 8 let, požadovaný roční nominální výnos do splatnosti činí 9 %. Kupónové platby jsou vypláceny pololetně, roční kupónová sazba je 7 %. Vypočtěte střední dobu splatnosti a modifikovanou duraci.

Příklad 10: Uvažujme obligaci s nominální hodnotou 20 000 Kč, která vyplácí kupónové platby jednou ročně ve výši 6 % nominální hodnoty. Doba splatnosti je 5 let, výnos do splatnosti 8 %. Vypočtěte přibližnou novou tržní cenu obligace a) při zvýšení úrokové sazby o 1 %, b) při snížení úrokové sazby o 1 % (v obou případech zahrňte i konvexitu).

Příklad 11: Pomocí durace určete, jak se změní tržní úroková míra, pokud víte, že se cena dluhopisu s kupónovou sazbou 7,2 % p.a. v důsledku této změny sníží o 1,25 %. Kupóny tohoto dluhopisu jsou vypláceny ročně. Cena dluhopisu na trhu před změnou zajišťuje výnosnost do doby splatnosti ve výši 5,6 % p.a. a do splatnosti zbývá ještě 5 let.

Příklad 12: Banka má následující strukturu aktiv a pasiv:

	hodnota	durace	výnosnost
Aktiva	$P_A = 1\ mil.$	$D_A = 5$	$i_A = 12\ \%\ p.a.$
Pasiva	$P_P = 1\ mil.$	$D_P = 1{,}5$	$i_B = 10{,}5\ \%\ p.a.$

Jaké je riziko banky v případě, že se úroková sazba změní o 1bps?

Příklad 13: Na trhu jsou dostupné tyto dva dluhopisy:

a) dvouletý diskontovaný dluhopis o jmenovité hodnotě 30 000Kč,

b) kupónový dluhopis o jmenovité hodnotě 50 000Kč, s kupónovou sazbou 6,7 % p.a. při roční výplatě kupónu, splatný za 5 let.

Investor chce investovat 7,5 mil. Kč v horizontu 4 let. Určete částku na nákup kupónového dluhopisu tak, aby portfolio složené z těchto dvou dluhopisů bylo imunizováno proti malé změně úrokové míry. Současná tržní úroková míra činí 3,8 % p.a.

Studijní literatura

Povinná literatura

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4. (s. 217-238)

Doporučená literatura

RADOVÁ, J., J. MÁLEK, P. JABLONSKÝ a M. RADA, 2011. *Finanční matematika pro každého – příklady + CD-ROM.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-3584-9. (s. 175-195)

RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého*. 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3. (s. 131-201)

3.8 Akcie, devizové obchody, finanční a termínové obchody, výkonosti portfolia, vícesložkové portfolio

Klíčová slova

Akcie, ážio, devizový trh, riziko, střední hodnota, rozptyl, výnosy, faktory,

Cíle kapitoly

Student se během předmětu seznámí s problematikou devizových trhů, vztahů mezi nimi. Dále se podrobně seznámí s akciemi. Dokáže odhadnout rizika spojená s portfoliem a faktory, které jej ovlivňují.

Výstupy z učení

- 4.7 ocení dluhopisy, akcie a pracuje s měnovými kurzy

Příklad, uvedení vzorového úkolu

Příklad 1: Stanovte vnitřní hodnotu akcie firmy za předpokladu, že očekáváte výši dividendy na konci 1. roku 120 Kč, uvažujete 14 % požadovanou míru výnosnosti a předpokládáte:

a) konstantní výši dividend v jednotlivých letech

b) konstantní roční míru růstu dividend ve výši 10 %

Řešení:

a, $\mathrm{PA} = \frac{\mathrm{DIV}}{\mathrm{r}}$

$$\mathrm{PA} = \frac{\mathrm{DIV}}{\mathrm{r}} = \frac{120}{0{,}14} = 857\mathrm{Kč}$$

b, $\mathrm{PA} = \mathrm{DIV}_0 \cdot \frac{1+g}{r-g}$ $\qquad \mathrm{DIV}_0 = \frac{\mathrm{DIV}_1}{1+g} = \frac{120}{1+0.1} = 109{,}09$

$$\mathrm{PA} = 109{,}09 \cdot \frac{1+0{,}1}{0{,}14-0{,}1} = 3\,000\mathrm{Kč}$$

Příklad 2: Předpokládejme období jednoho měsíce (30 dnů). Na počátku byla vložena částka 74 200 Kč, desátého dne byla opět vložena částka 37 100 Kč a dvacátý den byla vybrána částka 25 000 Kč. Hodnota portfolia desátý den (spolu s vloženou částkou 37 100 Kč) byla 103 100 Kč, hodnota portfolia dvacátého dne (po vybrání částky 25 000 Kč) byla 104 400 Kč a koncová hodnota portfolia na konci měsíce byla 109 000 Kč.

Řešení:

V tomto případě nastávaly toky na konci každé subperiody. Máme tedy:

$V_s = \quad 74\,200 \qquad\qquad C_1 = \ 37\,100$

$V_1 = 103\,100 \qquad\qquad C_2 = -25\,000$

$V_2 = 104\,400$

$V_E = 109\,000$

Dosazením do vzorce máme:

$$1 + r = \frac{103\,100 - 37\,100}{74\,200} \cdot \frac{104\,400 + 25\,000}{103\,100} \cdot \frac{109\,000}{104\,400}$$

$r = 16{,}5579$

Zadání samostatné práce (úkolu)

Příklad 3: V loňském roce byla vyplacena dividenda v hodnotě 75 Kč. Odhadněte kurz akcie (vnitřní hodnotu), předpokládáte-li konstantní dividendu a výnosnost 20 %.

Příklad 4: Jak vysokou dividendu vyplatí a.s. za tři roky, když nyní vyplatila běžnou dividendu

21,60 Kč a.s. udržuje konstantní míru růstu dividend 5 % ročně.

D0 = 21,60 Kč

g = 5 %

D3 = ?

Příklad 5: Investor odhaduje, že dividenda na konci tohoto roku bude 1,1 Kč na jednu akcii. Kolik zaplatí za jednu akcii počátkem příštího roku, předpokládá-li, že dividendy se budou vyplácet trvale s konstantním růstem 5 % ročně, a požaduje přitom 10 % roční výnos?

Příklad 6: Akciová společnost A má základní kapitál 300 mil. Kč a rozhodla se jej navýšit na 400 mil. Kč. Kurz starých akcií byl kótován na úrovni 3 000 Kč za akcii. Nové akcie jsou prodávány za 2 500 Kč a mají stejné právo na první následující dividendu jako staré akcie. Stanovte: a) Odebírací poměr, b) Hodnotu odebíracích práv pro 18 starých akcií, které vlastníte, c) Kolik mladých akcií si můžete koupit, pakliže uplatníte odebírací práva ke všem akciím, které vlastníte, d) Na jakém novém kurzu se akcie společnosti A ustálí na trhu po emisi mladých akcií?

Příklad 7: Pavel uložil 50 000 Kč u konkurenční banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3 %. Úrokovací období vkladu je 1 měsíc. Kolik Kč zaplatí banka Pavlovi na úrocích za jeden měsíc? Kolik Kč zbude po zdanění? Pavel bude mít peníze uložené v bance po dobu pěti let. Úroky banka nepřipisuje ke vkladu, ale posílá je Pavlovi na jeho běžný účet. Urči jeho majetek po pěti letech spoření.

Příklad 8: Na počátku byla vložena částka 74 200 Kč, desátého dne byla opět vložena částka 37 100 Kč a dvacátý den byla vybrána částka 25 000 Kč. Hodnoty portfolia těsně před peněžními toky byly postupně 66 000 Kč a 129 400 Kč a hodnota portfolia na konci měsíce byla ve výši 109 000 Kč.

Příklad 9: Vyjdeme ze zadání předchozího příkladu. Z uvedených hodnot portfolia potřebujeme pouze počáteční hodnotu VS = 74 200 a koncovou hodnotu VE = 109 000. Váhy jsou pak

$$W_1 = (30 - 10)/30 = 0{,}6667$$

$$W_2 = (30 - 20)/30 = 0{,}3333$$

Příklad 10: Předpokládejme měsíční časovou periodu (30 dnů). Na počátku je hodnota portfolia 50 000 Kč, desátý den je vloženo 20 000 Kč a dvacátý den je vybráno 10 000 Kč. Konečná hodnota portfolia třicátý den je 70 000 Kč

Příklad 11: Předpokládejme časovou periodu 1 měsíc (30 dnů). Na počátku je vložena částka 200 000 Kč. Dvacátého dne je vložena další částka 400 000 Kč a po vložení této částky má portfolio hodnotu 800 000 Kč. Na konci měsíce má pak portfolio hodnotu 500 000 Kč. Vypočítejme výkonost portfolia TWR metodou (toky na konci subperiody) a modifikovanou Dietzovou metodou.

Studijní literatura

Povinná literatura

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4. (s. 239-282)

Doporučená literatura

RADOVÁ, J., J. MÁLEK, P. JABLONSKÝ a M. RADA, 2011. *Finanční matematika pro každého – příklady + CD-ROM.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-3584-9. (s. 207-225)

RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého.* 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3. (s. 207-225)

3.9 Měnové kurzy

Klíčová slova

Měnový kurz, měnový trh, dovoz, vývoz, revalvace, devalvace

Cíle kapitoly

Student se během předmětu seznámí s problematikou mezinárodních měnových systémů a vztahů mezi nimi. Seznámí se s pojmy měnového systému. Naučí se stanovit měnový kurz.

Výstupy z učení

- 4.7 ocení dluhopisy, akcie a pracuje s měnovými kurzy

Příklad, uvedení vzorového úkolu

Příklad 1: Určete křížový kurz AKEUR/USD, znáte-li aktuální kurzy AKCZK/EUR = 29, 53 a AKCZK/USD = 24, 47.

Řešení:

Budeme postupovat podle schématu odvození výše:

$$1\text{USD} = 24{,}47\ \text{Kč}$$

$$1\text{Kč} = \frac{1}{29{,}53}\ \text{EUR}$$

$$1\text{USD} = \frac{24{,}47}{29{,}53}\ \text{EUR}$$

Křížový kurz AKEUR/USD je 0,83, neboli jeden americký dolar dostaneme koupit za 0,83 euro.

Zadání samostatné práce (úkolu)

Příklad 2: Kolik euro dostaneme za 1 000 Kč, je-li kurz koruny k euru kotován jako 24,010 CZK/EUR?

Příklad 3: Kolik korun dostaneme v bance za 150 dolarů, je-li kurz dolaru ke koruně kotován jako 0,05676 USD/CZK?

Příklad 4: Určete křížový kurz PKEUR/USD, znáte-li promptní kurzy PKCZK/EUR = 27,765 a PKCZK/USD = 21,424.

Příklad 5: Máme kurz koruny k dolaru a k švýcarskému franku:
SR CZK/USD = 24,40 CZK/USD,
SR CZK/CHF = 19,10 CZK/CHF
My máme určit kurz SRCHF/USD .

Příklad 6: Kolik norských korun (NOK) bude stát jedna švédská koruna (SEK)? Kolik švédských korun bude stát jedna norská koruna? Víte, že AKCZK/NOK = 3,796 a AKCZK/SEK = 3,062.

Příklad 7: Vypočtěte termínové měnové kurzy TKN USD/EUR a TKP USD/EUR k datu za tři měsíce ode dneška, máte-li k dispozici aktuální kurzy AKN CZK/EUR = 28, 85, AKN CZK/USD = 23, 91, AKP CZK/EUR = 21, AKP CZK/USD = 25, 03, iEUR = 1, 08%p.a., iUSD = 2, 57%p.a.

Studijní literatura

Povinná literatura

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4. (s. 263-283)

Doporučená literatura

JÍLEK J., 2013. *Finance v globální ekonomice II – Měnová a kurzová politika.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-8822-7. (s. 333-390)
RADOVÁ, J., J. MÁLEK, P. JABLONSKÝ a M. RADA, 2011. *Finanční matematika pro každého – příklady + CD-ROM.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-3584-9. (s. 225-231)
RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každéh.* 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3. (s. 152-201)

3.10 *Úvod do analýzy časových řad, složky časových řad*

Klíčová slova

časové řady, klouzavý průměr, diference, index růstu

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je seznámit studenty se základem problematiky časových řad a ukazatelů jejich průběhu.

Výstupy z učení

- 4.1 využívá posloupnosti při řešení matematických problémů
- 4.2 pracuje s časovými řadami, sčítá a analyzuje jejich konvergenci

Příklad, uvedení vzorového úkolu

Příklad 1: Měsíční výroba cementu v ČR během roku 2011 tvoří časovou řadu 536, 384, 727, 789, 817, 798, 817, 816, 817, 765, 675, 358 (v tis. tun). Pro účely srovnání měsíční produkce cementu sestavte časovou řadu produkcí pro standardní měsíc o délce

a) 30 dnů

b) 365/12 dnů.

Řešení:

Pro očištěnou výrobu v lednu platí:

a) pro standardní měsíc o délce 30 dnů:

$$\frac{536}{31} \cdot 30 = 518{,}71 \text{ tun}$$

$$\frac{536}{31} \cdot \frac{365}{12} = 525{,}21 \text{ tun}$$

Pro další měsíce provedeme očištění podobně. Všechny výchozí i očištěné údaje jsou uvedeny následující tabulce:

Měsíc	Výroba	Počet dní v měsíci	Výroba za 30 dnů	Výroba za 365/12 dnů
Leden	536	31	519	526
Únor	384	28	411	417
Březen	727	31	704	713
Duben	789	30	789	800
Květen	817	31	791	802
Červen	798	30	798	809
Červenec	817	31	791	802
Srpen	816	31	790	801
Září	817	30	817	828
Říjen	765	31	740	751
Listopad	675	30	675	684
Prosinec	358	31	346	351

Příklad 2: Průměrná hrubá měsíční nominální mzda v Ústeckém kraji za roky 2004 - 2008 je v následující tabulce. Určete nárůst (případně pokles) měsíční nominální mzdy. Určete průměrný přírůstek za jeden rok.

rok	mzda
2004	15 322
2005	16 345
2006	17 113
2007	19 606
2008	20 962

Řešení:

Pro přírůstek (přesněji diferenci) v roku 2005 platí:

$$\mathrm{d}_{2005} = \mathrm{a}_{2005} - \mathrm{a}_{2004} = 16345 - 15322 = 1023$$

Všechny výsledky jsou v následující tabulce:

rok	mzda	diference *d*
2004	15 322	---
2005	16 345	1 023
2006	17 113	768
2007	19 606	2 493
2008	20 962	1 356

Průměrný absolutní přírůstek je proto

$$\bar{d} = \frac{(1023 + 768 + 2493 + 1356)}{4} = 1410$$

Příklad 3: V předchozím příkladu určete procentní nárůst (případně pokles) měsíční nominální mzdy. Určete průměrné tempo růstu za jeden rok.

Řešení:

Pro procentní nárůst (přesněji koeficient růstu) v roku 2005 platí:

$$\mathrm{k}_{2005} = \frac{\mathrm{a}_{2005}}{\mathrm{a}_{2004}} = \frac{16345}{15322} = 1{,}0673$$

Všechny výsledky jsou v následující tabulce:

rok	mzda	koeficient růstu k
2004	15 322	---
2005	16 345	1,0668
2006	17 113	1,0470
2007	19 606	1,1457
2008	20 962	1,0692

Průměrný koeficient růstu je proto

$$\bar{\mathrm{k}} = \sqrt[4]{1{,}0668 + 1{,}0470 + 1{,}1457 + 1{,}0692} = 1{,}082$$

Průměrný nárůst za uvedené roky je 8,2%.

Příklad 4: Průměrná hrubá měsíční nominální mzda v Ústeckém kraji za roky 2004 - 2008 je v následující tabulce. Určete procentní nárůst (případně pokles) měsíční nominální mzdy. Určete průměrné tempo růstu za jeden rok.

rok	mzda
2004	15 322
2005	16 345
2006	17 113
2007	19 606

2008	20 962

Řešení:

Pro procentní nárůst (přesněji koeficient růstu) v roku 2005 platí:

$$k_{2005} = \frac{a_{2005}}{a_{2004}} = \frac{16345}{15322} = 1{,}0673$$

Všechny výsledky jsou v následující tabulce:

rok	mzda	koeficient růstu *k*
2004	15 322	---
2005	16 345	1,0668
2006	17 113	1,0470
2007	19 606	1,1457
2008	20 962	1,0692

Průměrný koeficient růstu je proto

$$\bar{k} = \sqrt[4]{1{,}0668 + 1{,}0470 + 1{,}1457 + 1{,}0692} = 1{,}082$$

Průměrný nárůst za uvedené roky je 8,2%.

Příklad 5: Sestavme rovnici trendové funkce ve tvaru přímky pro údaje o tržbách obchodní organizace a určeme předpověď této tržby pro následující dva měsíce. Hodnoty a potřebné výpočty jsou uvedeny v tabulce.

Měsíc	*t*	y_t
Leden	1	328541
Únor	2	325154
Březen	3	330244
Duben	4	329570
Květen	5	332489
Červen	6	340025

Červenec	7	338962
Srpen	8	342110

Řešení:

K určení parametrů přímky nejdřív rozšíříme tabulku o další dva sloupce, t^2, $t \cdot y_t$ a další dva řádky, součet a průměr:

Měsíc	t	y_t	$t \cdot y_t$	t^2
Leden	1	328541	328541	1
Únor	2	325154	650308	4
Březen	3	330244	990732	9
Duben	4	329570	1318280	16
Květen	5	332489	1662445	25
Červen	6	340025	2040150	36
Červenec	7	338962	2372734	49
Srpen	8	342110	2736880	64
Součty	36	2667095	12100070	204
Průměry	4,5	333386,9	1512509	25,5

Určení parametrů přímky:

$$\widehat{a_1} = \frac{12100070 - 4{,}5 \cdot 2667095}{204 - 8 \cdot 4{,}5^2} = 2\,336{,}7$$

$$\widehat{a_0} = 333386{,}9 - 2336{,}7 \cdot 4{,}5 = 322\,871{,}58$$

Odhadovaná trendová přímka je proto

$$T_t = 322\,871{,}58 + 2\,336.7 \cdot t$$

Předpověď (extrapolace) pro další dva měsíce odpovídá hodnotám trendové přímky pro hodnoty $t = 9$ a $t = 10$

$T_9 = 343\,902{,}22\ Kč$

$T_{10} = 346\,238{,}95\ Kč$

Zadání samostatné práce (úkolu)

Příklad 6: Měsíční výroba hraček firmy ABC během roku 2015 představuje časovou řadu 222, 258, 298, 306, 304, 200, 247, 301, 222, 400, 350, 201 v ks. Pro účely srovnání měsíční produkce cementu sestavte časovou řadu produkcí pro standardní měsíc o délce 30 dnů.

Příklad 7: Měsíční výroba hraček firmy ABC během měsíců 1. – 11. 2015 představuje časovou řadu 222, 258, 298, 306, 304, 200, 247, 301, 222, 400, 350, v ks. Pro účely srovnání měsíční produkce cementu sestavte časovou řadu produkcí pro standardní měsíc o délce 365/11 dnů.

Příklad 8: Uvažujme časovou řadu výroby elektrické energie (v TWh) v Maďarsku v letech 2000 – 2012. Pokuste se vyrovnat tuto řadu pomocí klouzavého průměru délky 3, pak pomocí klouzavého průměru délky 5.

Rok	t	y_t	MA(3)	MA(5)
2000	1	38,6		
2001	2	41,6		
2002	3	43,1		
2003	4	45,2		
2004	5	47,2		
2005	6	51,4		
2006	7	53,5		
2007	8	56,0		
2008	9	59,3		
2009	10	62,7		
2010	11	66,5		
2011	12	69,1		
2012	13	68,1		

Příklad 9: Průměrné hrubé měsíční nominální mzdy ve firmě CDEi za roky 2004 - 2008 jsou následující: Určete nárůst (pokles) měsíční nominální mzdy. Pomocí průměrné diference se pokuste odhadnout mzdu v dalším roku.

rok	mzda
2004	16 222
2005	17 645
2006	18 113
2007	20 804
2008	22 359

Příklad 10: Průměrná výroba čokolád ve firmě DITO a.s. za měsíce 1. – 7. roku 2017 činí (v tis ks):

Leden	58 000
Únor	68 000
Březen	55 000
Duben	48 000
Květen	47 000
Červen	47 000
Červenec	45 000

Zjistěte diference u počtu vyrobených kusů. Pomocí průměrné diference se pokuste odhadnout počet kusů v dalším období.

Příklad 11: Průměrné hrubé měsíční nominální mzdy ve firmě CDEi za roky 2004 - 2008 jsou následující: Určete koeficienty růstu. Pomocí průměrného tempa růstu se pokuste odhadnout mzdu v dalším roku.

rok	mzda
2004	16 222
2005	17 645
2006	18 113
2007	20 804
2008	22 359

Příklad 12: Průměrná výroba čokolád ve firmě DITO a.s. za měsíce 1. – 7. roku 2017 činí (v tis ks):

Leden	58 000
Únor	68 000
Březen	55 000
Duben	48 000
Květen	47 000
Červen	47 000
Červenec	45 000

Zjistěte diference a koeficienty růstu u počtu vyrobených kusů. Pomocí průměrného tempa růstu se pokuste odhadnout počet kusů v dalším období.

Příklad 13: Sestavme rovnici trendové funkce pro údaje o tržbách obchodní organizace. Výchozí hodnoty jsou uvedeny v tabulce. Doplňte potřebné chybějící hodnoty, střední hodnoty a součty v tabulce. Následně proveďte výpočty. Ověřte, že předpověď pro měsíce červen a červenec jsou obdobné jako v řešeném příkladu.

Měsíc	t	y_t	$t \cdot y_t$	t^2
Leden	1	328541		
Únor	2	325154		
Březen	3	330244		
Duben	4	329570		
Květen	5	332489		
Součty Průměry				

Příklad 14: V tabulce jsou uvedeny údaje o počtu provedených oprav autoopravnou y_t za léta 1993 - 2005. Odhadněte trendovou funkci. Porovnejte hodnoty předpovědí pomocí trendové funkce se skutečnými hodnotami.

Rok	y_t	t	t^2	$y_t \cdot t$		$\hat{T}_t$
93	1901	1				
94	2085	2				
95	2124	3				
96	2431	4				
97	2858	5				

98	3164	6				
99	3150	7				
00	2963	8				
01	2746	9				
02	2986	10				
03	3103	11				
04	3287	12				
05	3488	13				
Σ						

Studijní literatura

Povinná literatura

ARLT, J. a M. ARTLOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady.* Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (s. 25-46)

Doporučená literatura

ARLT, J., M. ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady.* Praha: Oeconomica. ISBN 80-245-0777-3. (s. 20- 66)

3.11 *Modelování časových řad*

Klíčová slova

časové řady, modelování časové řady, složky časové řady

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je seznámit studenty se základními složkami časových řad a ukazatelů jejich průběhu, jejich modelováním.

Výstupy z učení

- 4.1 využívá posloupnosti při řešení matematických problémů
- 4.2 pracuje s časovými řadami, sčítá a analyzuje jejich konvergenci

Příklad, uvedení vzorového úkolu

Příklad 1: Uvažujeme údaje o tržbách obchodní organizace y_t v mil. Kč v letech 1994-2010 (v tabulce). Trend v tržbách popište funkcí $T_t = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$.

Rok	y_t
94	8,3
95	7,8
96	8,8
97	9,9
98	11,7
99	13,3
00	15,5
01	16,5
02	16,1
03	15,9
04	18,1
05	20,1
06	20,7
07	23,4
08	26,5
09	28,6
10	31,9

Σ	293,1

Řešení:

Potřebné výpočty jsou uvedeny v tabulce níže.

Rok	y_t	t'	$(t')^2$	$(t')^4$	$y_t \cdot t'$	$y_t \cdot (t')^2$
94	8,3	-8	64	4096	-66,4	531,2
95	7,8	-7	49	2401	-54,6	382,2
96	8,8	-6	36	1296	-52,8	316,8
97	9,9	-5	25	625	-49,5	247,5
98	11,7	-4	16	256	-46,8	187,2
99	13,3	-3	9	81	-39,9	119,7
0	15,5	-2	4	16	-31	62
1	16,5	-1	1	1	-16,5	16,5
2	16,1	0	0	0	0	0
3	15,9	1	1	1	15,9	15,9
4	18,1	2	4	16	36,2	72,4
5	20,1	3	9	81	60,3	180,9
6	20,7	4	16	256	82,8	331,2
7	23,4	5	25	625	117	585
8	26,5	6	36	1296	159	954
9	28,6	7	49	2401	200,2	1401,4
10	31,9	8	64	4096	255,2	2041,6
Σ	293,1	0	408	17544	569,1	7445,5

(Zde jsme vhodně přeznačili časovou proměnnou t, není to nutné, ale tímto způsobem se sníží součty v posledním řádku.)

Určení parametrů přímky:

$$\widehat{a_1} = \frac{569{,}1}{408} = 1{,}395$$

$$\widehat{a_0} = \frac{293{,}1 \cdot 17544 - 408 \cdot 7445{,}5}{17 \cdot 17544 - 408^2} = 15{,}968$$

$$\widehat{a_2} = \frac{17 \cdot 17544 - 293{,}1 \cdot 408}{17 \cdot 17544 - 408^2} = 0{,}053$$

Parabolickou trendovou funkci modelující trend v tržbách dané organizace odhadujeme tedy ve tvaru

$$T_t = 15{,}968 + 1{,}395 \cdot t' + 0{,}053 \cdot (t')^2$$

Zadání samostatné práce (úkolu)

Příklad 2: Vytvořte grafický model následujícího úlohy z předchozí kapitoly. Výsledky interpretujte. Pokuste se vložit spojnici trendu. K modelu využijte program Excel. Zjistěte další statistické hodnoty.

Rok	y_t	t	t'	$(t')^2$	$y_t \cdot t'$	$\hat{T}_t$
93	1901	1	-6	36	-11406	
94	2085	2	-5	25	-10425	
95	2124	3	-4	16	-8496	
96	2431	4	-3	9	-7293	
97	2858	5	-2	4	-5716	
98	3164	6	-1	1	-3164	
99	3150	7	0	0	0	
00	2963	8	1	1	2963	
01	2746	9	2	4	5492	
02	2986	10	3	9	8958	
03	3103	11	4	16	12412	
04	3287	12	5	25	16435	
05	3488	13	6	36	20928	
Σ	36286	-	0	182	20688	

Příklad 3: Vytvořte grafický model následujícího úlohy z předchozí kapitoly. Výsledky interpretujte. Pokuste se vložit spojnici trendu. K modelu využijte program Excel. Zjistěte další statistické hodnoty.

Rok	y_t	t'	$(t')^2$	$(t')^4$	$\hat{T}_t$
94	8,3	-8	64	4096	8,200
95	7,8	-7	49	2401	8,800
96	8,8	-6	36	1296	9,506
97	9,9	-5	25	625	10,318
98	11,7	-4	16	256	11,236
99	13,3	-3	9	81	12,260
00	15,5	-2	4	16	13,390
01	16,5	-1	1	1	14,626
02	16,1	0	0	0	15,968
03	15,9	1	1	1	17,416
04	18,1	2	4	16	18,970
05	20,1	3	9	81	20,630
06	20,7	4	16	256	22,396
07	23,4	5	25	625	24,268

08	26,5	6	36	1296	26,246
09	28,6	7	49	2401	28,330
10	31,9	8	64	4096	30,520
$\sum$	293,1	0	408	17544	293,080

Studijní literatura

Povinná literatura

ARLT, J. a M. ARTLOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady.* Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (s. 25-49)

Doporučená literatura

ARLT, J., M. ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady.* Praha: Oeconomica. ISBN 80-245-0777-3. (s. 20-66)

3.12 Trendová složka, modely trendových složek

Klíčová slova

časové řady, trend, průběh trendu časové řady

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je seznámit studenty s průběhem časové řady a jednotlivými modely trendových složek časových řad.

Výstupy z učení

- 4.2 pracuje s časovými řadami, sčítá a analyzuje jejich konvergenci

Příklad, uvedení vzorového úkolu

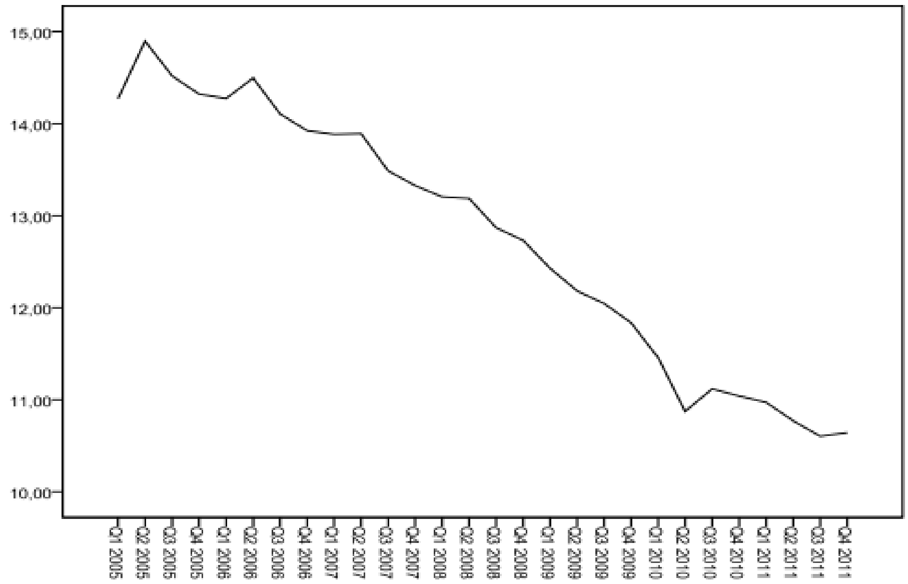
Příklad 1: V tabulce jsou uvedeny sezónně očištěné čtvrtletní údaje o podílu nezaměstnaných 30 – 34 letých na celkové nezaměstnanosti Slovenska v letech 2005 až 2011 v %. Vyberte vhodný model trendu, ověřte jeho vhodnost (analyzujte rezidua) a určete předpovědi do konce roku 2012. Testujte významnost regresních koeficientů na hladině významnosti 5 %.

	2005	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**
I.	14,273	14,273	13,884	13,204	12,428	11,457	10,971
II.	14,898	14,495	13,891	13,187	12,181	10,872	10,771
III.	14,517	14,105	13,487	12,869	12,046	11,119	10,604
IV.	14,322	13,924	13,327	12,731	11,835	11,04	10,642

Řešení:

Sestrojíme graf časové řady. Z grafu vidíme klesající lineární trend sezónně očištěné časové řady, doporučujeme graf sestavit v prostředí programu Excel.

Sezónně očištěná čtvrtletní časová řada podílu nezaměstnaných 30 – 34 letých na celkové nezaměstnanosti Slovenska v letech 2005 – 2011



Z hodnot v Excelu následně zjistíme hodnotu korelačního koeficientu $r = 0{,}983$, která ukazuje na vysokou závislost mezi proměnnou a časem. Koeficient determinace $R^2 = 0{,}967$ modelem je vysvětleno 96,7 % celkové variability.

Zadání samostatné práce (úkolu)

Příklad 2: Vytvořte grafický model následujícího úlohy z předchozí kapitoly. Výsledky interpretujte. Pokuste se vložit spojnici trendu. K modelu využijte program Excel. Zjistěte další statistické hodnoty.

Rok	y_t	t	t'	$(t')^2$	$y_t \cdot t'$	$\hat{T}_t$
93	1901	1	-6	36	-11406	
94	2085	2	-5	25	-10425	
95	2124	3	-4	16	-8496	
96	2431	4	-3	9	-7293	
97	2858	5	-2	4	-5716	
98	3164	6	-1	1	-3164	
99	3150	7	0	0	0	
00	2963	8	1	1	2963	
01	2746	9	2	4	5492	
02	2986	10	3	9	8958	
03	3103	11	4	16	12412	
04	3287	12	5	25	16435	
05	3488	13	6	36	20928	

Σ	36286	-	0	182	20688	

Příklad 3: Vytvořte grafický model úlohy z předchozí kapitoly. Výsledky interpretujte. Pokuste se vložit spojnici trendu. K modelu využijte program Excel. Zjistěte další statistické hodnoty.

Rok	y_t	t'	$(t')^2$	$(t')^4$	$\hat{T}_t$
94	8,3	-8	64	4096	8,200
95	7,8	-7	49	2401	8,800
96	8,8	-6	36	1296	9,506
97	9,9	-5	25	625	10,318
98	11,7	-4	16	256	11,236
99	13,3	-3	9	81	12,260
00	15,5	-2	4	16	13,390
01	16,5	-1	1	1	14,626
02	16,1	0	0	0	15,968
03	15,9	1	1	1	17,416
04	18,1	2	4	16	18,970
05	20,1	3	9	81	20,630
06	20,7	4	16	256	22,396
07	23,4	5	25	625	24,268
08	26,5	6	36	1296	26,246
09	28,6	7	49	2401	28,330
10	31,9	8	64	4096	30,520
Σ	293,1	0	408	17544	293,080

Studijní literatura

Povinná literatura

ARLT, J. a M. ARTLOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady.* Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (s. 49-69)

Doporučená literatura

ARLT, J., M. ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady.* Praha: Oeconomica. ISBN 80-245-0777-3. (s. 20-66)

3.13 Využití časových řad k prognózování

Klíčová slova

časové řady, trend, průběh trendu časové řady, využití časových řad

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je seznámit studenty s vhodností používání a využitím časových řad pro předpovídání a prognózování.

Výstupy z učení

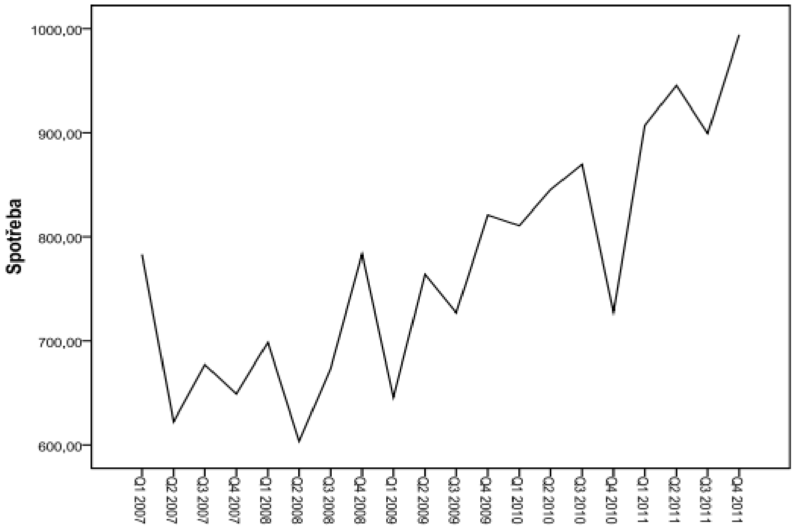
- 4.2 pracuje s časovými řadami, sčítá a analyzuje jejich konvergenci

Příklad, uvedení vzorového úkolu

Příklad 1: Jsou dány čtvrtletní údaje sezónně očištěné časové řady spotřeby elektrické energie firmy Stella v letech 2007 – 20011 v kWh. Cílem analýzy je najít model trendu a ověřit jeho vhodnost v období v letech 2007 – 2009, otestovat autokorelaci nesystematické složky, určit předpovědi na roky 2010 – 2011 a posoudit, zda je vybraný model vhodný na předpovídání.

	2007	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**
I.	782,99	698,49	645,63	810,8	907,07
II.	622,34	603,51	764,05	845,31	945,4
III.	677,23	673,55	726,99	869,81	899,29
IV.	649	782,92	821,04	728,32	994,1

Řešení:



Z grafu vidíme, že vývoj spotřeby elektrické energie má kvadratický trend. Období analýzy rozdělíme na dvě části. Na období interpolace (prvních 12 údajů) a období verifikace modelu (posledních 8 údajů).

Při aplikaci kvadratického modelu je zřejmé, že na 5% hladině významnosti nejsou koeficienty přírůstku a zrychlení statisticky významné. Kvadratický trend proto není vhodně zvolený. Pokud odhadneme kvadratický trend na celé časové řadě od I/2007 – IV/2011, dostaneme výsledky uvedené níže. Z tohoto výstupu je zřejmé, že koeficient přírůstku je na rozdíl od koeficientu zrychlení stále na 5 % hladině významnosti statisticky nevýznamný. Upravíme proto kvadratický trend tak, že tento koeficient z modelu vyloučíme. Využijeme Excel. Dostáváme pak rovnici druhého modelu $Y_t = 663{,}5 + 0{,}758 * t^2$, kde koeficient zrychlení je statisticky významný. Vypočtěme ještě z reziduí hodnotu reziduálního rozptylu: 3201,587. Z této hodnoty lze usuzovat, že sezónně očištěné hodnoty řady spotřeby elektrické energie firmy Stella budou kolísat kolem kvadratického trendu o směrodatnou chybu: 56,58 [kWh].

Zadání samostatné práce (úkolu)

Příklad 2: Časová řada obsahuje údaje o produkci firmy v měsících březen až říjen roku 2012 (v tis. Kč): 121 120 124 125 127 129 132 134. Sestavte rovnici trendové přímky a určete bodovou i 90 %-ní intervalovou předpověď produkce na měsíc listopad a prosinec 2012.

Příklad 3: Uvažujeme časovou řadu hodnot 8,3 8,4 8,9 8,6 8,8 8,8 8,7 8,7 8,6 8,5 7,9, udávající spotřebu určité suroviny (v kg) na 1 obyvatele České republiky v letech 2001 -

2011. Vyrovnejte časovou řadu pomocí kvadratického trendu a testujte významnost odhadnutých koeficientů na hladině významnosti 5 %. Znázorněte graficky původní i vyrovnaná data. Odhadněte spotřebu suroviny v roce 2012.

Studijní literatura

Povinná literatura

ARLT, J. a M. ARTLOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady.* Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (s. 49-69)

Doporučená literatura

ARLT, J., M. ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady.* Praha: Oeconomica. ISBN 80-245-0777-3. (s. 20-66)

Studijní literatura

Povinná literatura

ARLT, J. a M. ARTLOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6.

CIPRA, T., 2008. *Finanční ekonometrie.* Praha: Ekopress. ISBN 978-80-86929-43-9.

DOŠLÁ, Z. a P. LIŠKA, 2014. *Matematika pro nematematické obory*. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-5322-5.

PROUZA, L., 2007. *Finanční a pojistná matematika.* Praha: Vysoká škola ekonomie a managementu. ISBN 978-80-86730-17-2.

ŠOBA, O., M. ŠIRŮČEK a R. PTÁČEK, 2013. *Finanční matematika v praxi*. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4636-4.

Doporučená literatura

ARLT, J., M. ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*, 2. vyd. Praha: Vysoká škola ekonomická, Oeconomica. ISBN 80-245-0777-3.

EPPING, R. CH., 2004. *Průvodce globální ekonomikou.* Praha: Portál. ISBN 978-80-7178-825-6.

JÍLEK, J., 2013. *Finance v globální ekonomice II – Měnová a kurzová politika.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-8822-7.

RADOVÁ, J., P. DVOŘÁK a J. MÁLEK, 2013. *Finanční matematika pro každého*. 8., rozš. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-4831-3.

RADOVÁ, J., J. MÁLEK, P. JABLONSKÝ a M. RADA, 2011. *Finanční matematika pro každého – příklady + CD-ROM.* Praha: Grada. ISBN 978-80-247-3584-9.