5. POSLOUPNOSTI A ŘADY

Průvodce studiem

Seznámili jste se už s pojmem reálné funkce jedné reálné proměnné. Nyní tento pojem rozšíříme a seznámíme se s funkcemi, jejichž definičním oborem jsou jen přirozená čísla. Ukážeme si, jak je užitečné se těmito speciálními funkcemi zabývat. Nové vědomosti pomohou vyřešit mnoho praktických úloh .

Cíle

Objasnit pojem posloupnosti obecně, dále pojem posloupnosti aritmetické a geometrické, limity posloupnosti a nekonečné geometrické řady a na příkladech ukázat možnosti využití.

Předpokládané znalosti

Pojem reálné funkce jedné reálné proměnné, který jste si zopakovali v kapitole **2**.

5.1. Pojem posloupnosti čísel

Výklad

Mějme za úkol sledovat u nemocného pacienta teplotu. Důležitá je nejen naměřená hodnota ale i denní doba a pořadí, ve kterém byla naměřena. Měření budeme provádět v každou celou hodinu a výsledek naší péče o pacienta zapíšeme do tabulky.

Pořadí měření:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
denní doba:	7^{oo}	8^{oo}	9^{oo}	10^{oo}	11^{oo}	12^{oo}	13^{oo}
teplota:	36,6°C	36,5°C	37°C	37°C	37,2°C	37,9°C	38°C

Sledujeme-li v tomto přehledu pouze uspořádané dvojice $[1;36,6]$, $[2;36,5]$, $[3;37]$,... atd., vidíme v nich, že přirozeným číslům 1, 2, 3, 4, … jsou přiřazována reálná čísla 36,6; 36,5; 37; 37; 37,2; …atd.

Toto přiřazení je funkcí, jejíž argument je vždy přirozené číslo, a je tedy posloupností.

O naměřených hodnotách mluvíme jako o členech posloupnosti. Jiný, než tabulka či uspořádané dvojice, je používaný zápis: $a_1 = 36,6;\ a_2 = 36,5;\ a_3 = 37$, ...

Funkce, jejímž definičním oborem je množina **N** všech přirozených čísel, se nazývá **posloupnost (nekonečná číselná posloupnost).**

U funkcí tohoto druhu zapisujeme argument jako index hodnoty funkce. Tedy:

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ f(3) = a_3, \ldots,\ f(n) = a_n, \ldots$$

Posloupnost, která každému $n \in \mathbf{N}$ přiřazuje číslo $a_n \in \mathbf{R}$, se zapisuje některým

z následujících způsobů: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$,

(a_n),

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

nebo stručně $\{a_n\}$.

Příklady posloupností:

1. Čísla 2, 4, 6, 8, 10, 12, … jsou prvními členy posloupnosti sudých kladných čísel. Tato posloupnost vznikne tak, že každému přirozenému číslu n přiřadíme jeho dvojnásobek $2n$. Libovolný člen $a_n = 2n$. Zapisujeme ji $\{2n\}$.
2. Čísla 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... jsou prvními členy posloupnosti převrácených čísel k přirozeným číslům. Dostaneme ji přiřazováním převrácené hodnoty $\frac{1}{n}$ ke každému přirozenému číslu, takže její libovolný člen $a_n = \frac{1}{n}$.
3. Čísla 4, 7, 10, 13, 16, … jsou prvními členy posloupnosti, ve které je každému přirozenému číslu n přiřazeno číslo $1+3n$ a zapisujeme ji $\{1+3n\}$.

Řešená úloha

Příklad 5.1.1 Jaký je rozdíl mezi symboly

a) $\{a_n\}$,

b) $\{a_n, n \in \mathbf{N}\}$,

c) a_n.

Řešení:

a) Tento symbol označuje posloupnost.

b) Takto označujeme množinu všech členů posloupnosti $\{a_n\}$.

c) Toto je *n*-tý člen posloupnosti $\{a_n\}$.

5.1.1. Grafické znázornění posloupnosti

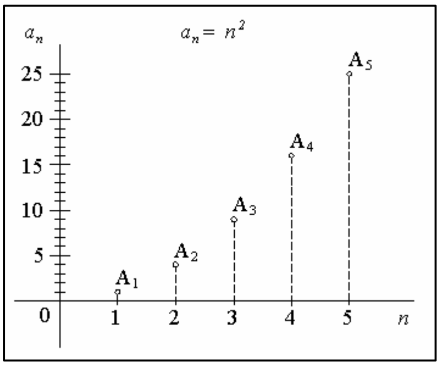
Výklad

Posloupnosti znázorňujeme v pravoúhlé soustavě souřadnic v rovině. **Grafem posloupnosti** je vždy množina izolovaných bodů $\{[n, a_n] \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}\}$. Člen a_n posloupnosti reálných čísel znázorňujeme v pravoúhlé soustavě souřadnic bodem $A_n = [n, a_n]$.

Řešené úlohy

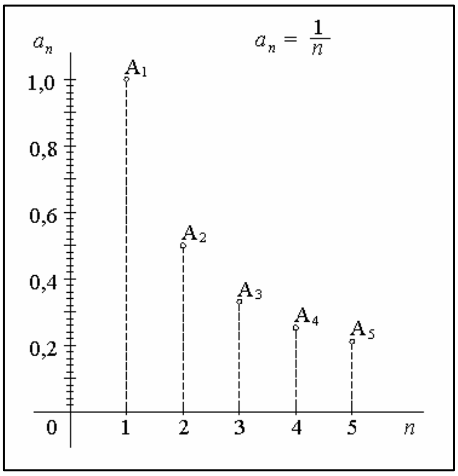
Příklad 5.1.2. Graficky znázorněte prvních pět členů posloupnosti $\{n^2\}$.

Řešení:



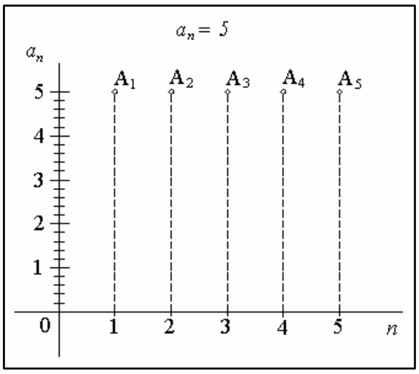
Příklad 5.1.3. Graficky znázorněte prvních pět členů posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Řešení:



Příklad 5.1.4. Graficky znázorněte prvních pět členů posloupnosti $\{5\}$.

Řešení:



5.1.2. Některé vlastnosti posloupností

Výklad

Posloupnost s reálnými členy je zvláštním případem reálné funkce reálné proměnné, proto můžeme také u ní zkoumat obdobné vlastnosti, např. ohraničenost a monotónnost.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

shora ohraničená, existuje-li takové číslo $h \in \mathbf{R}$, že $a_n \le h, \forall n \in \mathbf{N}$,

zdola ohraničená, existuje-li takové číslo $d \in \mathbf{R}$, že $a_n \ge d, \forall n \in \mathbf{N}$,

ohraničená, je-li ohraničená shora i zdola.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

rostoucí $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}$ platí, že $a_{n+1} > a_n$,

klesají $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}$ platí, že $a_{n+1} < a_n$,

neklesající $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}$ platí, že $a_{n+1} \ge a_n$,

nerostoucí $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}$ platí, že $a_{n+1} \le a_n$.

Má-li posloupnost některou ze čtyř výše uvedených vlastností, nazývá se **monotónní**, přičemž posloupnosti rostoucí a klesající se nazývají **ryze monotónní**.

Řešené úlohy

Příklad 5.1.5. Zjistěte, zda posloupnost, ve které pro libovolný člen platí $a_n = \frac{n(n-1)}{n+1}$, je ryze monotónní.

Řešení: Předpokládejme, že tato posloupnost je rostoucí a je tedy $a_n < a_{n+1}$. Člen $a_n = \frac{n(n-1)}{n+1}$ a člen $a_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)-1)}{(n+1)+1} = \frac{(n+1)n}{n+2}$ dosadíme do předpokladu $a_n < a_{n+1}$ a dostaneme nerovnici $\frac{n(n-1)}{n+1} < \frac{(n+1)n}{n+2}$, u které potřebujeme zjistit, zda platí pro všechna přirozená čísla. Po jejím vynásobení kladným číslem $\frac{(n+1)(n+2)}{n}$ dostaneme $n^2 + n - 2 < n^2 + 2n + 1$. Odtud pak po úpravě $n > -3$, což platí $\forall n \in \mathbf{N}$. Náš předpoklad byl správný a zjistili jsme, že posloupnost je rostoucí a tedy ryze monotónní.

Příklad 5.1.6. Zjistěte, zda je posloupnost $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$ ohraničená.

Řešení: První členy posloupnosti jsou: $1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, \dots, \frac{200}{101}, \dots$

Lze usuzovat, že je rostoucí, což ověříme platností vztahu $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbf{N}$. Po dosazení dostáváme $\frac{2(n+1)}{n+2} > \frac{2n}{n+1}$, po úpravě $2(n^2 + 2n + 1) > 2(n^2 + 2n)$, tedy $2 > 0$. Víme nyní, že posloupnost roste, a chceme zjistit, zda je ohraničená. Člen $a_1 = 1$ této rostoucí posloupnosti má nejmenší hodnotu. Zadání pro n-tý člen upravíme takto: $\frac{2n}{n+1} = 2n : (n+1) = 2 - \frac{2}{n+1}$.

Z toho vyplývá, že všechny členy posloupnosti jsou menší než 2. Zjevně pro všechna přirozená čísla n je $1 \le a_n \le 2$, tedy $d \le |a_n| \le h$, kde $d = 1, h = 2$. Posloupnost je tedy ohraničená.

Poznámka

Na předchozích příkladech vidíme, že je možné některé posloupnosti určit vzorcem pro n-tý člen. Jsou však i jiné velmi důležité posloupnosti, u kterých takový vzorec udat neumíme. (Například u rostoucí posloupnosti všech prvočísel: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …) Velmi častý a důležitý je případ, kdy je dán první člen nebo několik prvních členů posloupnosti a pro následující členy je dán předpis, jak se má určit člen a_{n+1} na základě znalosti předchozích členů $a_1, a_2, ..., a_n$. V takovém případě říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je definována ***rekurentně*** *(latinsky recurrere = běžeti zpět).*

Řešené úlohy

Příklad 5.1.7. Napište prvních pět členů posloupnosti, která je dána rekurentně:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+1} = a_n - a_{n-1}\ .$$

Řešení: $a_3 = a_2 - a_1 \Rightarrow a_3 = 1$; $a_4 = a_3 - a_2 \Rightarrow a_4 = -1$; $a_5 = a_4 - a_3 \Rightarrow a_5 = -2$.

Příklad 5.1.8. Napište prvních deset členů posloupnosti dané rekurentně:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\ .$$

Řešení: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. Tato posloupnost se nazývá Fibonacciova.

Kontrolní otázky

1. Tvoří množina N všech přirozených čísel uspořádaných podle velikosti posloupnost?

2. Je posloupnost $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ monotónní?

3. Může být grafem posloupnosti přímka nebo polopřímka?

5.2. Aritmetická posloupnost

Výklad

Aritmetické posloupnosti jsou speciální typy posloupností, které mají velký teoretický i praktický význam.

Aritmetická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně vztahy:

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d, \forall n \in \mathbf{N},$$

kde a, d jsou daná reálná čísla.

Číslo d nazýváme **diference** (diference = rozdíl), protože se rovná rozdílu $a_{n+1} - a_n$ kterýchkoliv dvou sousedních členů posloupnosti, tj. $d = a_{n+1} - a_n$.

Uvedeme si nyní jednu vlastnost každé aritmetické posloupnosti, která je pro ni charakteristická. Podle definice je rozdíl každých dvou jejích sousedních členů konstantní.

Platí tedy : $$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$$

pro každé $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Odtud dostáváme rovnici, z níž plyne pro člen a_n :

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Tento vztah vyjadřuje, že počínaje druhým členem, je každý člen aritmetické posloupnosti **aritmetickým průměrem členů sousedních.** Obráceně, je-li v posloupnosti každý člen $a_n, n \geq 2$ aritmetickým průměrem členů sousedních, jedná se o aritmetickou posloupnost.

Řešená úloha

Příklad 5.2.1. Určete prvních pět členů aritmetické posloupnosti, je-li dán sedmý člen $a_7 = 10$ a šestý člen $a_6 = 8$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
a_7 &= a_6 + d &&\Rightarrow 10 = 8 + d &&\Rightarrow d = 2\\
a_6 &= a_5 + d &&\Rightarrow 8 = a_5 + 2 &&\Rightarrow a_5 = 6\\
a_5 &= a_4 + d &&\Rightarrow 6 = a_4 + 2 &&\Rightarrow a_4 = 4\\
a_4 &= a_3 + d &&\Rightarrow 4 = a_3 + 2 &&\Rightarrow a_3 = 2\\
a_3 &= a_2 + d &&\Rightarrow 2 = a_2 + 2 &&\Rightarrow a_2 = 0\\
a_2 &= a_1 + d &&\Rightarrow 0 = a_1 + 2 &&\Rightarrow a_1 = -2.
\end{aligned}$$

Výklad

Snadno vidíme, že *n*-tý člen aritmetické posloupnosti lze vyjádřit pomocí prvního členu a potřebného násobku diference:

$$a_n = a_1 + (n-1)d\,.$$

Pro libovolné dva členy a_r, a_s aritmetické posloupnosti platí vztah:

$$a_s = a_r + (s-r)d\,.$$

Řešené úlohy

Příklad 5.2.2. V aritmetické posloupnosti je dáno $a_4 = 18$, $a_7 = 16$, určete a_1, d, a_{10}.

Řešení: Podle $a_s = a_r + (s-r)d$ je $a_7 = a_4 + 3d \Rightarrow 3d = a_7 - a_4 \Rightarrow d = -\frac{2}{3}$.

Podle $a_n = a_1 + (n-1)d$ pak je $a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow a_1 = a_4 - 3d \Rightarrow a_1 = 20$.

Podle $a_n = a_1 + (n-1)d$ je také $a_{10} = a_1 + 9d = 20 + 9(-\frac{2}{3}) = 14$.

5.2.1. Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti

Výklad

Mějme za úkol sečíst všechna přirozená čísla od jedné do padesáti. Můžeme si počínat tak, že napíšeme sčítance vzestupně a sestupně a pak je sečteme :

$$1+2+3+\cdots+49+50=s$$

$$50+49+\cdots+3+2+1=s$$

Součtem těchto rovnic dostáváme :

$$(1+50)+(2+49)+\cdots+(50+1)=2s \;\Rightarrow 50\cdot 51 = 2s \Rightarrow\; s=\frac{50\cdot 51}{2}=1275\,.$$

Z takto řešené úlohy vidíme, že lze odvodit pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ vzorec:

$$s_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}\,.$$

Řešené úlohy

Příklad 5.2.3. Vypočtěte součet prvních n přirozených lichých čísel.

Řešení: Lichá přirozená čísla tvoří aritmetickou posloupnost, ve které je $a_1 = 1, d = 2$

Podle $a_n = a_1 + (n-1)d$ je $a_n = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$;

proto podle $s_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ je $s_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \dfrac{n(1 + 2n - 1)}{2} = n^2$.

Součet prvních n lichých přirozených čísel má hodnotu n^2.

Příklad 5.2.4. Trubky jsou srovnány v osmi řadách nad sebou tak, že vrchní má 13 trubek a každá další řada o jednu více. Kolik je všech trubek dohromady?

Řešení: Počty trubek v řadách jsou prvními osmi členy aritmetické posloupnosti, ve které je $a_1 = 13, d = 1$ a podle $a_n = a_1 + (n-1)d$ je $a_8 = 13 + 7 \cdot 1 = 20$. Máme-li určit počet všech trubek, určíme součet prvních osmi členů této posloupnosti.

Dosadíme do vzorce $s_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow s_8 = \dfrac{8 \cdot (13 + 20)}{2} = 4 \cdot 33 = 132$.

Trubek je tedy celkem 132.

Příklad 5.2.5. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku jsou prvními třemi členy aritmetické posloupnosti.Určete délky odvěsen víte-li, že přepona měří 30 cm.

Řešení: Označme odvěsny v trojúhelníku $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3 = 30$.

$$a_1 = a_3 - 2d = 30 - 2d$$
$$a_2 = a_3 - d = 30 - d$$

Z Pythagorovy věty pro délky stran pravoúhlého trojúhelníku dostáváme

$$(30 - 2d)^2 + (30 - d)^2 = 30^2$$
$$900 - 120d + 4d^2 + 900 - 60d + d^2 = 900$$
$$5d^2 - 180d + 900 = 0$$
$$d^2 - 36d + 180 = 0$$
$$d_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot 180}}{2} = \frac{36 \pm 24}{2} \Rightarrow d_1 = 30,\ d_2 = 6$$

Kořen $d_1 = 30$ pro náš úkol nemá smysl.

Druhý kořen $d_2 = 6 = d \Rightarrow a_1 = 30 - 2 \cdot 6 = 18$, $a_2 = 30 - 1 \cdot 6 = 24$.

Strany pravoúhlého trojúhelníku měří 18, 24 a 30 cm.

Příklad 5.2.6. Mezi čísla $a = 2{,}6;\ b = 4{,}7$ vložte 9 čísel tak, aby s danými dvěma čísly tvořila prvních 11 členů aritmetické posloupnosti.

Řešení: V uvažované posloupnosti je zadán její první a jedenáctý člen.

$$a_1 = a = 2{,}6$$
$$a_{11} = b = 4{,}7 \Rightarrow 4{,}7 = 2{,}6 + 10d$$
$$d = \frac{4{,}7 - 2{,}6}{10} = 0{,}21$$

Prvních jedenáct členů posloupnosti jsou tedy čísla:

$2{,}6;\ 2{,}81;\ 3{,}02;\ 3{,}23;\ 3{,}44;\ 3{,}65;\ 3{,}86;\ 4{,}07;\ 4{,}28;\ 4{,}49;\ 4{,}7.$

Příklad 5.2.7. Aritmetická posloupnost má diferenci $d = -12$ a člen $a_n = 15$. Kolik prvních členů této posloupnosti má součet $s_n = 456$?

Řešení: $a_1 = a_n - (n-1)d = 15 - (n-1)(-12) = 15 + 12n - 12 = 3 + 12n.$

Pro součet dostaneme rovnici s neznámou $n \in \mathbf{N}$:

$$456 = \frac{n(3 + 12n + 15)}{2} \quad /\cdot 2$$
$$912 = 18n + 12n^2 \quad /:6$$
$$152 = 3n + 2n^2 \Rightarrow 2n^2 + 3n - 152 = 0$$
$$n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 2\cdot(-152)}}{2\cdot 2} = \frac{-3 \pm 35}{4}$$
$$n_1 = 8, \quad n_2 = -\frac{19}{2} \notin \mathbf{N}.$$

Hledané n *je* $n_1 = 8$.

V dané posloupnosti má prvních osm členů předpokládaný součet.

Příklad 5.2.8. Za dobrý prospěch dal otec synovi počátkem školního roku první kapesné 100 Kč s tím, že mu bude v průběhu pěti měsíců toto kapesné zvyšovat buď po měsíci vždy o 4 Kč, nebo po půl měsících vždy o 1 Kč. Zkuste nejprve odhadnout, která nabídka je pro syna výhodnější, a pak se o tom výpočtem přesvědčte.

Řešení: Odhadli jste, že je výhodnější pro syna, když mu bude otec zvyšovat kapesné o 1 Kč za půl měsíce než o 4 Kč za měsíc? Přesvědčíme se o tom porovnáním součtů dvou aritmetických posloupností.

Posloupnost při měsíčním navyšování má $a_1 = 100, d = 4, n = 5$.

Její součet je $s_5 = \dfrac{5\left(100 + 100 + (5-1)d\right)}{2} = 5 \cdot 108 = 540$.

Při půlměsíčním navyšování kapesného jde o jinou posloupnost, která má $a_1 = 50, d = 1, n = 10$.

Její součet je $s_{10} = \dfrac{10\left(50 + 50 + (10-1)d\right)}{2} = 5 \cdot 109 = 545$.

Porovnáním získaných součtů vidíme, že je druhá varianta pro syna o pět korun výhodnější.

Příklad 5.2.9. Určete aritmetickou posloupnost, u které platí:

$a_2 + a_3 + a_5 = 64,\ a_7 - a_2 - a_3 = 16$.

Řešení: Určit máme hodnotu prvního členu a diference. Použitím $a_n = a_1 + (n-1)d$ dostaneme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a_1, d, kterou vyřešíme dosazovací metodou.

$$\begin{aligned} &a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 4d = 64 \\ &a_1 + 6d - (a_1 + d) - (a_1 + 2d) = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3a_1 + 7d = 64 \\ &-a_1 + 3d = 16 \ \Rightarrow\ a_1 = 3d - 16 \end{aligned}$$

$$3(3d - 16) + 7d = 64 \Rightarrow 9d - 48 + 7d = 64 \Rightarrow 16d = 112 \Rightarrow d = 7$$

$$a_1 = 3 \cdot 7 - 16 = 21 - 16 = 5$$

Posloupnost je určena svým prvním členem $a_1 = 5$ a diferencí $d = 7$.

Příklad 5.2.10. Jak je hluboká studna, víme-li, že výkop každého následujícího metru byl o 500 Kč dražší než výkop metru předešlého. Za výkop posledního metru a třetího metru od konce bylo zaplaceno dohromady tolik, kolik by stál výkop celé studny, pokud by každý metr výkopu stál stejně jako výkop prvního metru. Průměrná cena jednoho metru výkopu byla 2500 Kč.

Řešení: Ceny za výkopy po sobě jdoucích metrů studny jsou prvními členy aritmetické posloupnosti, o které ze zadání víme, že $d = 500$, $\dfrac{s_n}{n} = 2500$ a $a_{n-2} + a_n = na_1$.

Hledaná hloubka studny je rovna počtu n členů naší posloupnosti a zjevně je možné předpokládat, že $n \geq 3$. Užitím vztahů platných v aritmetické posloupnosti získáváme ze zadání:

$$2500 = \frac{s_n}{n} = \frac{\frac{n(a_1 + a_n)}{2}}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2} \Rightarrow a_1 + a_n = 5000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1 + (n-1)d = 5000 \Rightarrow a_1 = \frac{5000 - dn + d}{2}.$$

Pro $d = 500$ je $a_1 = \dfrac{5500 - 500n}{2} \Rightarrow a_1 = 2750 - 250n$

$$a_{n-2} + a_n = na_1 \Rightarrow a_1 + (n-3)d + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + 2nd - 4d = na_1 \Rightarrow$$
$$na_1 - 2a_1 = 2nd - 4d \Rightarrow a_1(n-2) = 1000(n-2)$$

Pro $n \geq 3$ je $a_1 = 1000$.

Dosazením dostáváme: $1000 = 2750 - 250n \Rightarrow 250n = 1750 \Rightarrow n = 7$.

Studna je hluboká sedm metrů.

Kontrolní otázky

1. Je aritmetická posloupnost rostoucí, je-li její diference $d < 0$?
2. Jak určíme součet prvních n členů aritmetické posloupnosti?
3. Co je to diference aritmetické posloupnosti?

5.3. Geometrická posloupnost

Výklad

Aritmetické posloupnosti vystihovaly změnu, kterou bychom mohli charakterizovat jako rovnoměrnou, neboť přírůstky od jednoho členu k následujícímu byly konstantní. Nyní sledujme míček volně spuštěný z výšky jednoho metru, který se po dopadu na vodorovnou rovinu odrazí vždy do výše rovné $\frac{1}{3}$ výšky, ze které dopadl. Čísla $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ jsou výšky, kterých míček po odrazech dosahuje. Tvoří posloupnost, kterou nazýváme geometrickou.

Geometrická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně vztahy

$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n q,\ \forall n \in \boldsymbol{N}$, kde a, q jsou daná čísla.

Číslo q se nazývá **kvocient geometrické posloupnosti**. Budeme předpokládat, že je

$a \neq 0 \wedge q \neq 0.$ V takovém případě je každé $a_n \neq 0$ a z rekurentního vztahu plyne pro

kvocient (latinský název pro podíl), že $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Uveďme si na ukázku prvních pět členů geometrické posloupnosti, je-li dán její první člen a kvocient .

a) $a_1 = 1, q = 3$ — $1; 3; 9; 27; 81; \ldots$

b) $a_1 = 2, q = 1{,}5$ — $2; 3; 4{,}5; 6{,}75; 10{,}125; \ldots$

c) $a_1 = 10, q = \dfrac{1}{2}$ — $10; 5; 2{,}5; 1{,}25; 0{,}625; \ldots$

d) $a_1 = 2, q = -3$ — $2; -6; 18; -54; 162; \ldots$

Poznámka

Je-li kvocient záporný ($q < 0$), pak členy geometrické posloupnosti reálných čísel jsou střídavě kladné a záporné a taková posloupnost není ani rostoucí, ani klesající; to vidíme na příkladu d).

Je-li kvocient kladný ($q > 0$), pak má geometrická posloupnost reálných čísel buď všechny členy kladné, nebo všechny členy záporné.

Je-li $q = 1$, není posloupnost ani klesající ani rostoucí, je konstantní.

Posloupnosti s kladnými členy, jsou pro $q > 1$ rostoucí a pro $0 < q < 1$ klesající.

Výklad

Také pro geometrické posloupnosti reálných čísel je možné odvodit charakteristickou vlastnost, která platí jen pro posloupnosti geometrické.

Z definice plyne, že podíl každých dvou sousedních členů je konstantní. Znamená to, že platí:

$q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ a také $q = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$. Můžeme tedy porovnat $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_{n+1} \cdot a_{n-1} = a_n^2$.

Součin $a_{n+1} \cdot a_{n-1}$ je kladné číslo a tedy $|a_n| = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$.

Je-li $\{a_n\}$ geometrická posloupnost reálných čísel, pak absolutní hodnota každého jejího členu (kromě prvního) je rovna geometrickému průměru členů sousedních, tj.

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} .$$

Obráceně, je-li v posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$ absolutní hodnota každého členu (kromě prvního) geometrickým průměrem členů sousedních, je to posloupnost geometrická.

Z definice geometrické posloupnosti víme, že je určena prvním členem a kvocientem a platí:

$$a_{n+1} = a_n q ,$$

tj. $a_2 = a_1 q,\ a_3 = a_2 q = a_1 q^2,\ a_4 = a_3 q = a_1 q^3, \ldots$

Na základě toho vidíme, že pro výpočet n-tého členu geometrické posloupnosti dané prvním členem $a_1 \neq 0$ a kvocientem $q \neq 0$ platí vztah:

$$a_n = a_1 q^{n-1} .$$

Pro libovolné dva členy a_r, a_s geometrické posloupnosti, v níž je $a_1 \neq 0, q \neq 0$, platí rovnost

$$a_s = a_r q^{s-r} .$$

5.3.1. Součet prvních n členů geometrické posloupnosti

Výklad

Pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ platí vztahy:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ pro } q \neq 1 , \quad \text{nebo} \quad s_n = n a_1 \text{ pro } q = 1 .$$

Řešené úlohy

Příklad 5.3.1. Napište prvních pět členů geometrické posloupnosti, je-li dáno:

a) $a_1 = 4,\ a_2 = \dfrac{4}{3}$,

b) $a_5 = 2\sqrt{3},\ a_3 = \sqrt{3}$.

Řešení: a) Nejprve určíme podíl dvou sousedních členů neboli kvocient naší geometrické posloupnosti

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{4}{3}}{4}=\frac{1}{3}\Rightarrow q=\frac{1}{3}.$$

Z definice je pak

$$a_3=a_2q=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9} \text{ (nebo podle } a_n=a_1q^{n-1} \text{ je } a_3=a_1q^2=4\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\text{)},$$

$$a_4=a_3q=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27} \qquad \text{(nebo } a_4=a_1q^3=4\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{4}{27}\text{)},$$

$$a_5=a_4q=\frac{4}{27}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{81} \qquad \text{(nebo } a_5=a_1q^4=4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{4}{81}\text{)}.$$

b) Jsou dány dva libovolné členy geometrické posloupnosti. Kvocient určíme podle $a_s=a_rq^{s-r}$.

$$a_5=a_3q^{5-3}\Rightarrow 2\sqrt{3}=\sqrt{3}\,q^2\Rightarrow q^2=2\Rightarrow |q|=\sqrt{2}.$$

Tato rovnice dává dvě možná řešení. Nejprve určíme zbývající členy posloupnosti pro $q=\sqrt{2}$:

$$a_4=a_3q=\sqrt{3}\sqrt{2}=\sqrt{6},\quad a_2=\frac{a_3}{q}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2},\quad a_1=\frac{a_2}{q}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Nyní druhé řešení pro $q=-\sqrt{2}$:

$$a_4=\sqrt{3}\left(-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{6},\quad a_2=\frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{2},\quad a_1=\frac{-\frac{\sqrt{6}}{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Příklad 5.3.2. Určete počet prvních n členů geometrické posloupnosti, znáte-li $a_1=-27, a_n=-3$ a součet $s_n=-\left(12\sqrt{3}+39\right)$.

Řešení: Užitím $a_n=a_1q^{n-1}$ dostaneme: $-3=-27\cdot q^{n-1}\Rightarrow q^{n-1}=\frac{1}{9}\Rightarrow q^n=\frac{q}{9}$.

Toto vyjádření spolu se zadáním dosadíme do vztahu $s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

$$-(12\sqrt{3}+39) = -27\frac{\frac{q}{9}-1}{q-1} \qquad / \cdot (-\frac{1}{3})(q-1) \text{ , pro } q \neq 1$$

$$4\sqrt{3}q + 13q - 4\sqrt{3} - 13 = q - 9\,,$$

odkud je po úpravě $q = \dfrac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Dosazením do vztahu $q^{n-1} = \dfrac{1}{9}$ získáme exponenciální rovnici $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{9}$,

kterou převedeme na tvar $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4}$, odtud je $n-1=4$, tj. $n=5$.

Příklad 5.3.3. Představme si, že dva přátelé zpozorovali dne 1.ledna v 0.00 hodin přistání vesmírné lodi s mimozemšťany. Během čtvrt hodiny věděly o přistání i jejich manželky. Během další čtvrt hodiny sdělil každý z nich tuto událost svému známému, takže o události vědělo půl hodiny po půlnoci již 8 lidí Předpokládejme, že by se takto mohla zpráva šířit po čtvrthodinách i na další obyvatele Země. Zjistíte, kdy by se o přistáni vesmírné lodi dozvědělo lidstvo celého světa? Zkuste nejprve odhad.

Řešení: Počty informovaných lidí po čtvrthodinách jsou členy geometrické posloupnosti 2, 4, 8, 16, 32, …, kde $a_1 = 2$, $q = 2$.

Musíme zjistit, který její člen a_n přesáhne svou hodnotou počet obyvatel Země.

Víme, že je tento počet přibližně šest miliard a to zapisujeme jako číslo $6 \cdot 10^9$.

Chceme, aby $a_n \geq 6 \cdot 10^9$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

Řešíme tedy nerovnici $2^n \geq 6 \cdot 10^9$, pro $n \in \mathbf{N}$. Po zlogaritmování obou stran je

$$n \log 2 \geq \log 6 + 9 \log 10$$
$$n \log 2 \geq \log 6 + 9 \cdot 1$$

$$n \geq \frac{\log 6 + 9}{\log 2} \qquad \left[\frac{\log 6 + 9}{\log 2} \cong \frac{0{,}7782 + 9}{0{,}3010} \cong 32\right]$$

Takže téhož dne 1.ledna v 7hodin a 45 minut by o události vědělo

$2^{32} = 4\ 294\ 967\ 296$ obyvatel a za další čtvrt hodiny už by počet přesáhl počet obyvatel naší planety, neboť další člen posloupnosti je $2^{33} = 8\ 589\ 934\ 592$. Odhadli jste, že by k tomu stačilo přibližně osm hodin?

Příklad 5.3.4. Možná jste už někdy dostali nebo dostanete dopis, v němž jsou uvedena čtyři vám známá i neznámá jména s adresami a výzva ke hře, jejíž pravidla jsou stručně takováto – pošli pohlednici hráči, jehož adresa je z uvedených čtyř adres první v pořadí. Pokyny k této hře čtyřikrát opiš s tím rozdílem, že prvního hráče vynecháš a napíšeš sebe na čtvrté místo a dopisy pošli čtyřem novým spoluhráčům. Pak se můžeš těšit, že v krátké době dostaneš 256 pohlednic. Není to lákavé? Jistě ano, zvláště když se v jiné variantě této hry nabízí místo pohlednic peníze! Můžeme ale těch 256 pohlednic skutečně dostat?

Řešení: Rozešlete-li dopis se svou adresou na čtvrtém místě čtyřem známým, každý z nich opět čtyřem známým s vaší adresou na třetím místě atd., až se vaše adresa objeví na prvním místě a všech 256 účastníků vám zašle pohlednici, zdá se, že je vše v pořádku. Ale pozor, zatím jsme neuvažovali o tom, kolikátí v pořadí jste se do hry dostali. Představte si, že jste jedním z hráčů, který vstoupil do hry například v osmém kole hry. Počty hráčů v jednotlivých kolech vytvářejí geometrickou posloupnost $4, 16, 64, 256, \ldots, 4^n, \ldots$, ze které vidíme, že v osmém kole by se muselo hry zúčastnit $4^8 = 65536$ hráčů, abyste byli jistě úspěšní. Je ale docela možné, že se do hry dostanete až v kole dvanáctém. Aby se v tomto případě dostala vaše adresa na první místo, muselo by se už hry zúčastnit dokonce $4^{12} = 16777216$ hráčů, tedy víc hráčů, než má ČR obyvatel.

Odpověď na naši otázku tedy zní, že nejspíše ne.

Kontrolní otázky

1. Jaký je geometrický průměr čísel 2 a 8 ?
2. Co je to kvocient geometrické posloupnosti?
3. Jak určíme součet prvních *n* členů geometrické posloupnosti?

5.4. Užití geometrické posloupnosti

Výklad

Často se setkáváme s růstem nebo poklesem číselných údajů, které jsou členy geometrické posloupnosti, a změna jednotlivých členů je zadaná v procentech. Vzrůst každého členu o *p* procent znamená vzrůst členu ze 100% jeho hodnoty na (100+*p*)% této hodnoty, takže členy se stále zvětšují v poměru $\frac{100+p}{100} = 1 + \frac{p}{100}$.

Takovými údaji jsou například počty obyvatel v určitém časovém období, rozpad radia, výpočet úroků od banky z uložených vkladů a podobně. V následujících příkladech se podíváme na možná využití.

Řešené úlohy

Příklad 5.4.1. Za kolik let vzroste vklad a Kč při stálém ročním přírůstku o p% na k-násobek $(k > 0)$ své původní hodnoty?

Řešení: Označme velikost vkladu po n letech a_n. Stav po $(n+1)$ letech pak je

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_n p}{100} = a_n\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Jedná se zde o geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 1 + \frac{p}{100}$ a prvním členem $a_1 = aq$. To znamená, že $a_n = a_1 q^{n-1} = aq^n$.

Podle zadání platí $a_n = ka$, takže $aq^n = ka$, odkud $q^n = k$.

Logaritmováním získáme rovnici $n \log q = \log k$, ze které $n = \frac{\log k}{\log q}$,

tj. $n = \dfrac{\log k}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$.

Daný vklad vzroste na *k*-násobek své původní hodnoty za $\dfrac{\log k}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$ let.

Příklad 5.4.2. Ve městě dnes žije 85 600 obyvatel. Jaký počet obyvatel tam můžeme očekávat za 6 let, předpokládáme-li každoroční přírůstek 1,7% ?

Řešení: Po roce se zvětší počet obyvatel na 101,7% stavu, který byl počátkem roku.

Počty obyvatel po uplynutí jednotlivých roků tvoří geometrickou posloupnost

s kvocientem $q = \frac{101{,}7}{100} = 1{,}017$.

Označme si tedy počáteční stav $a_0 = 85\,600$. Počet po prvním roce bude $a_1 = a_0 q$ a

nás zajímá člen $a_6 = a_0 q^6 = 85\,600 \cdot 1{,}017^6 \cong 94\,710$.

Za šest let můžeme ve městě očekávat asi 94 710 obyvatel.

5.5. Limita posloupnosti

Výklad

Tento nový pojem budeme potřebovat v dalších úvahách a přitom se zaměříme jen na několik málo užití. Například pro odpověď na otázku, zda může existovat konečný součet nekonečně mnoha čísel. Po vysvětlení tohoto nového pojmu si ukážeme, že takový součet existovat může, byť sečíst nekonečně mnoho čísel nelze. Možná jste slyšeli o řeckém filozofovi Zenonovi z Eleje (asi 490 – 430 př.n.l.), který potrápil starověké matematiky škodolibým tvrzením, že rychlonohý Achilles nemůže nikdy dohonit želvu, má-li želva určitý náskok. Je to nesmysl, ale ukázat to není jednoduché. Limita posloupnosti nám k odpovědi pomůže. Slovo **limita** je latinského původu a znamená **mez** nebo **hranici**.

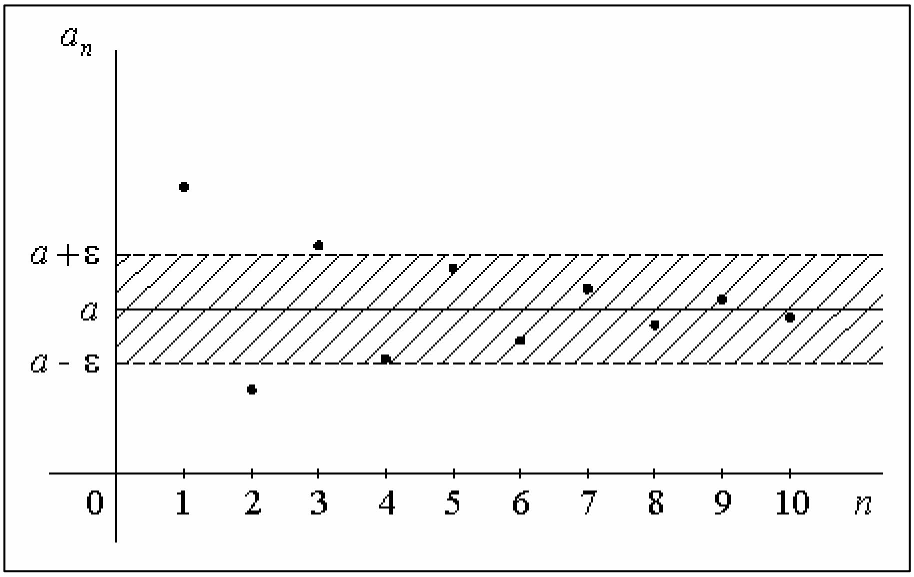
Všimněme si posloupnosti $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Její členy $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots$ klesají s rostoucím *n*, nikdy však nebudou menší než 1, neboť $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Členy této posloupnosti se zjevně blíží, neboli konvergují, k jedné. Číslo 1 je limitou této posloupnosti. To znamená, že od určité hodnoty *n* platí $\left|1 - \frac{n+1}{n}\right| < \varepsilon$, kde ε je libovolně zvolené kladné číslo.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má **limitu** $a \in \mathbf{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $n_0 \in \mathbf{N}$, že je $|a - a_n| < \varepsilon$ pro všechna $n > n_0, n \in \mathbf{N}$. Píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Má-li posloupnost konečnou limitu, říkáme, že je **konvergentní** (sbíhavá**).**

V opačném případě mluvíme o **divergentní** (rozbíhavé) posloupnosti.



Na obrázku je vidět, že pro všechna $n > 3$ patří obrazy členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v soustavě souřadnic v rovině do vnitřku pásu s „*hranicemi*" $a-\varepsilon,\ a+\varepsilon$.

Řešená úloha

Příklad 5.5.1. Zjistěte, zda je posloupnost $\left\{\dfrac{3n-7}{3n+7}\right\}$ konvergentní nebo divergentní.

Řešení: Daná posloupnost má n-tý člen $a_n = \dfrac{3n-7}{3n+7}$; (1)

po úpravě $a_n = \dfrac{3n+7-14}{3n+7} = 1 - \dfrac{14}{3n+7} \Rightarrow \quad 1 - a_n = \dfrac{14}{3n+7}$. (2)

Sledujme nyní posloupnost $\left\{\dfrac{14}{3n+7}\right\}$ a snažme se podle definice limity posloupnosti zjistit její limitu. Snadno vidíme, že je $\left|\dfrac{14}{3n+7}\right| = \dfrac{14}{3n+7}$, (3)

neboť $\forall n \in \mathbf{N}$ je $3n+7>0$. Proto můžeme předpokládat, že

$$\left|\frac{14}{3n+7}\right| < \varepsilon \qquad (4)$$

a odtud po úpravě $14 < 3n\varepsilon + 7\varepsilon \quad \Rightarrow \quad n > \dfrac{14-7\varepsilon}{3\varepsilon} = n_0$. (5)

Obráceně, je-li $n>n_0$, tj. platí-li (5), platí i (4). Ke každému $\varepsilon>0$ existuje tedy takové číslo n_0, že platí (4) pro všechna $n>n_0$.

Ze vztahů (2), (3), (4) plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Protože ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $|1 - a_n| < \varepsilon, \ \forall n > n_0$.

Podle (1) můžeme tedy psát $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-7}{3n+7} = 1$.

Daná posloupnost je konvergentní, konverguje k $a = 1$.

Kontrolní otázky

1. Má každá posloupnost svou limitu?
2. Je konstantní posloupnost konvergentní?

5.6. Nekonečná geometrická řada

Výklad

Vložíme-li mezi každé dva členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ znaménko + , dostaneme schéma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

které zapisujeme znakem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (čteme suma a_n od $n = 1$ do nekonečna).

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme nekonečná řada. Čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nazýváme členy této řady.

Omezíme se jen na nekonečné geometrické řady a ukážeme si, jak v některých případech dospějeme k pojmu **součet nekonečné řady.**

Vytvoříme posloupnost:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

kterou nazveme **posloupností částečných součtů** dané nekonečné řady. Pro tuto posloupnost pak mohou nastat pouze tyto dva případy: - má limitu s;

- nemá limitu.

V prvním případě říkáme, že daná nekonečná řada je **konvergentní,** a číslo s nazýváme jejím **součtem**. V druhém případě říkáme, že nekonečná řada je **divergentní**, tj. nemá součet.

Je-li nekonečná řada konvergentní se součtem s, pak symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ označujeme zápis nejen této řady, ale také její součet. Píšeme $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Lze dokázat, že nekonečná geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^n$ je konvergentní jenom v tom případě, když je $|q| < 1$; její součet potom je $s = \frac{a_1}{1-q}$.

Pro $|q| \geq 1$ je řada divergentní.

Řešené úlohy

Příklad 5.6.1. Určete součet nekonečné geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}}$.

Řešení: Řadu si nejprve vyjádříme pomocí několika prvních členů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots.$$

Je zřejmé, že $a_1 = 1$ a $q = \frac{1}{4}$, $(|q| < 1)$. Řada je konvergentní a pro její součet platí:

$$s = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Příklad 5.6.2. Najděte řešení dané rovnice: $\frac{8}{x+10} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^3} + \cdots$.

Řešení: Na pravé straně je v rovnici nekonečná geometrická řada s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem $q = -\frac{3}{x}$, kterou je nutno sečíst. To lze v případě, že je splněno: $|q| < 1$, tedy $\left|-\frac{3}{x}\right| < 1$. Tato nerovnice je splněna pro všechna $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$.

Pro tato x řada konverguje a je tedy podle $s = \dfrac{a_1}{1-q}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1\left(-\frac{3}{x}\right)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\left(-\frac{3}{x}\right)} = \frac{1}{1+\frac{3}{x}} = \frac{x}{x+3} \Rightarrow \frac{8}{x+10} = \frac{x}{x+3}.$$

Řešení takto upravené rovnice hledáme na množině
$M = (-\infty, -10) \cup (-10, -3) \cup (3, \infty)$.

$$\frac{8}{x+10} = \frac{x}{x+3} \quad /\cdot (x+10)\cdot(x+3)$$
$$8x + 24 = x^2 + 10x$$
$$x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4\cdot 24}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2}$$
$$x_1 = -6,\ x_2 = 4.$$

Oba kořeny leží v množině M a jsou tedy hledaným řešením dané rovnice.

Příklad 5.6.3. Určete dané racionální periodické číslo $a = 0{,}23\overline{48}$ ve tvaru zlomku, jehož čitatel i jmenovatel jsou celá čísla.

Řešení: Dané číslo (neryze periodické) je

$$a = 0{,}23484848... = 0{,}23 + 48\cdot 10^{-4} + 48\cdot 10^{-6} + 48\cdot 10^{-8} + \dots .$$

Za číslem $0{,}23$ vidíme konvergentní nekonečnou geometrickou řadu o prvním členu $a_1 = 48\cdot 10^{-4}$ a kvocientu $q = 10^{-2}$. Je tedy $a = 0{,}23 + s$, kde s je součet té řady.

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{48\cdot 10^{-4}}{1-10^{-2}} = \frac{48}{10^4 - 10^2} = \frac{48}{9900}$$

Proto je $a = \dfrac{23}{100} + \dfrac{48}{9900} = \dfrac{23\cdot 99 + 48}{9900} = \dfrac{2325}{9900}$.

Poznámka

Vzpomínáte si na tvrzení filozofa Zenona, že Achilles nikdy nedohoní pomalou želvu? Přibližme si vysvětlení tohoto paradoxu na jednodušším tvrzení Zenona, že žádný běžec nemůže proběhnout úsek z místa A do místa B. Zenonova úvaha byla dlouho matematicky nevyvratitelná. Posuďte sami. Má-li běžec proběhnout vzdálenost AB=1, musí proběhnout *nejdříve polovinu této vzdálenosti, potom polovinu zbývající vzdálenosti, potom opět polovinu zbývající vzdálenosti atd. Musí tedy proběhnout vzdálenost, která se rovná součtu nekonečného počtu úseků o délkách* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$. *A teď položil Zenon otázku.*

Jak je možné, že může běžec překonat nekonečný počet úseků za konečný čas?

Vysvětlení jistě už sami vidíte. Je to možné, protože úseky tvoří nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q=\frac{1}{2}$, *tedy konvergentní nekonečnou řadu , která má konečný součet*

$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$. *A tak je dokázáno, že tuto vzdálenost může běžec proběhnout v konečném čase. Podobně bychom dokázali, že Achilles dohoní želvu.*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete aritmetickou posloupnost, u které platí $a_1+a_4+a_6=71, a_5-a_2-a_3=2$.

2. Sečtěte prvních dvacet členů aritmetické posloupnosti, ve které je: $a_8=-2, a_{10}=0$.

3. V aritmetické posloupnosti určené členem $a_1=7$ a diferencí $d=-2$ je součet prvních n členů $s_n=-20$. Určete číslo n.

4. První člen geometrické posloupnosti je záporný. Která podmínka musí být splněna, aby posloupnost byla: a) rostoucí, b) klesající.

5. Určete kvocient geometrické posloupnosti, je-li: $a_3=-3, a_6=-192$.

6. Určete a_1, n a q geometrické posloupnosti, u níž platí:

$a_7-a_5=48,\ a_6+a_5=48,\ s_n=1023$.

7. Teploty Země přibývá do hloubky přibližně o $1^{\circ}\mathrm{C}$ na 30 metrů. Jaká je teplota na dně dolu 1015 metrů hlubokého, je-li v hloubce 25 metrů teplota $9^{\circ}\mathrm{C}$?

8. Řešte rovnici: $\frac{5}{3}=x+3x^2+x^3+3x^4+\cdots$.

9. Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2-26x+25=0$ vložte čísla tak, aby spolu s kořeny tvořila aritmetickou posloupnost se součtem 117. Určete tato čísla a diferenci.

10. Určete s_4 v geometrické posloupnosti, kde platí: $a_2-a_1=15,$ $a_3-a_2=60.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. $a_1 = 5, d = 7$; **2.** $s_{20} = 10$; **3.** $n = 10$; **4.** a) $q \in (0;1)$; b) $q \in (1;\infty)$; **5.** $q = 4$;

6. $a_1 = 1, q = 2, n = 10$; **7.** $42°C$; **8.** $\frac{1}{2};-\frac{5}{7}$; **9.** 4,7,10,13,16,19,22; $d = 3$;

10. $a_1 = 5, q = 4, s_4 = 425$.

Klíč k řešení úloh

1. Užitím vztahů $a_n = a_1 + (n-1)d$ a $a_s = a_r + (s-r)d$ získáte soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $\begin{array}{c} a_1 + a_1 + 3d + a_1 + 5d = 71 \\ a_1 + 4d - (a_1 + d) - (a_1 + 2d) = 2 \end{array}$, upravíme ji $\begin{array}{r} 3a_1 + 8d = 71 \\ -3a_1 + 3d = 6 \end{array}$

a dostaneme řešení $a_1 = 5$ a $d = 7$.

2. Užijeme postupně vztahy $a_n = a_1 + (n-1)d$, $a_s = a_r + (s-r)d$ a $s_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

Dostaneme soustavu $\begin{array}{l} a_1 + 7d = -2 \quad /\cdot(-1) \\ a_1 + 9d = 0 \end{array}$ a po vyřešení $d = 1$, $a_1 = -9$,

$a_{20} = a_1 + 19d = -9 + 19 = 10$

$s_{20} = \dfrac{20 \cdot (a_1 + a_{20})}{2} = 10 \cdot (-9 + 10) = 10$.

3. Užitím vztahů $a_n = a_1 + (n-1)d$ a $s_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ získáte kvadratickou rovnici o neznámé n.

Ze vztahu $-20 = \dfrac{n \cdot (7 + a_n)}{2}; n \in \mathbf{N}$ dosazením a úpravou dostaneme $n^2 - 8n - 20 = 0$, kořeny jsou $n_1 = 10, n_2 = -2$. Ale -2 není přirozené číslo, řešení je tedy jediné $n = 10$.

4. Posloupnosti rostoucí stejně jako posloupnosti klesající jsou monotónní. K tomu je třeba, aby jejich členy neměly znaménka střídavě kladná a záporná, což by nastalo při násobení záporným číslem. Budeme tedy v obou případech požadovat, aby kvocient bylo číslo kladné.

Vyjděme z podmínky pro rostoucí posloupnost, ta je $a_{n+1} > a_n$.Když zde oba členy nahradíme podle vztahu $a_n = a_1q^{n-1}$ dostaneme k vyřešení

nerovnice: $a_1 \cdot q^n > a_1q^{n-1} \wedge a_1 < 0$, které postupně upravujeme:

$a_1q^n - a_1q^{n-1} > 0$

$a_1(q^n - q^{n-1}) > 0 \ / \cdot \frac{1}{a_1} \wedge a_1 < 0$

$q^n - q^{n-1} < 0$,

$q^{n-1}(q-1) < 0$.

To je splněno pro $q^{n-1} < 0 \wedge q-1 > 0$ nebo pro $q^{n-1} > 0 \wedge q-1 < 0$.

Z těchto podmínek je $q < 0 \wedge q > 1$ nebo $q > 0 \wedge q < 1$.

Na závěr dostáváme $q \in \emptyset$ nebo $q \in (0, 1)$.

Geometrická posloupnost se záporným prvním členem je tedy rostoucí, je-li její kvocient číslo z otevřeného intervalu (0, 1).

Nyní vyjdeme z podmínky $a_{n+1} < a_n$. V předchozím postupu změníme znaménko nerovnosti, geometrická posloupnost se záporným prvním členem je klesající, má-li její kvocient hodnotu větší než jedna, tzn. řešením bude interval $q \in (1, \infty)$.

5. Použijeme vztahy $a_n = a_1q^{n-1}$ a $a_s = a_rq^{s-r}$.

6. Použijeme vztahy $a_n = a_1q^{n-1}$, $a_s = a_rq^{s-r}$ a $s_n = a_1\frac{q^n - 1}{q-1}$.

7. Použijeme platné vztahy aritmetické posloupnosti.

8. Na pravé straně zadané rovnice jsou dvě nekonečné geometrické řady, u kterých je třeba podle $s = \frac{a_1}{1-q}$ určit součty.

9. Kořeny rovnice označit jako první a *n*-tý člen aritmetické posloupnosti a užít vztah $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

10. Nejprve určit první člen a kvocient užitím vztahů $a_n = a_1q^{n-1}$, $a_s = a_rq^{s-r}$ a pak použít vztah $s_n = a_1\frac{q^n - 1}{q-1}$.

Kontrolní test

1. V aritmetické posloupnosti znáte $a_{10} = 25, a_{20} = -15$. Určete člen a_{50}.

   a) 1, b) -135, c) 0, d) -25.

2. Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 + x - 12 = 0$ vložte 6 čísel tak, aby spolu s kořeny tvořila členy aritmetické posloupnosti. Jaký je součet vložených čísel?

   a) součet $s = 6$, b) součet $s = 0$, c) součet $s = 4$, d) součet $s = -3$.

3. Obvod pravoúhlého trojúhelníku měří 24 cm. Velikosti jeho stran tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Určete délku přepony.

   a) 12, b) 10, c) 8, d) 6.

4. Aritmetická posloupnost má diferenci $d = 4$ a sedmý člen $a_7 = 27$. Vypočítejte kolik členů této posloupnosti má součet $s_n = 210$?

   a) -8, b) 8, c) 7, d) 10.

5. Vypočtěte osmý člen aritmetické posloupnosti, ve které platí $a_7 - a_2 = 20$, $a_8 + a_2 + a_5 = 57$.

   a) $a_8 = 31$, b) $a_8 = 30$, c) $a_8 = 28$, d) $a_8 = 37$.

6. Kolik čísel je třeba vložit mezi čísla 5 a 640 tak, aby součet vložených čísel byl 630 a aby vložená čísla tvořila s danými čísly po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti?

   a) 10, b) 6, c) 8, d) 9.

7. Kvádr, jehož velikosti hran tvoří geometrickou posloupnost, má povrch $S = 78m^2$. Součet délek hran procházejících jedním jeho vrcholem je $13m$. Vypočtěte hodnotu objemu takového kvádru v cm^3.

   a) 27, b) 24, c) 30, d) 21.

8. Součet čtyř po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti je 80. Určete její kvocient a první člen, víte-li, že druhý člen je devětkrát menší než čtvrtý člen.

   a) $|q| = 2$, $a_1 = 5$, b) $q = 5$ $a_1 = 1$, c) $q = 5$ $a_1 = 7$, d) $|q| = 3$, $a_1 = 2 \vee a_1 = -4$.

9. Určete součet s_3 geometrické posloupnosti, ve které je $a_2 - a_1 = 18$ a $a_4 - a_3 = 882$.

a) 200, b) 123, c) 410, d) 171.

10. Určete první člen a součet s_5 geometrické posloupnosti, ve které je $a_5 = 1280$ a $a_2 = 20$.

a) $a_1 = 4, s_3 = 58$, b) $a_1 = 5, s_3 = 105$,

c) $a_1 = -1, s_3 = 100$, d) $a_1 = 6, s_3 = 110$.

Výsledky testu

1. b); 2. d); 3. b); 4. d); 5. a); 6. b); 7. a); 8. d); 9. d); 10. b).

Shrnutí lekce

Smyslem této kapitoly bylo především docílit pochopení pojmu posloupnosti tak, jak je v matematice používán. Na příkladech posloupností aritmetických a geometrických pak po nutném procvičení ukázat i možná použití při řešení praktických úloh. Pojem limity posloupnosti je zde uveden jen stručně bez uvedení všech jejích vlastností, ale dostatečně jasně, abychom mohli pochopit i pojem nekonečné geometrické řady.

Dodejme, abyste se měli na co těšit, že matematika pracuje i s jinými řadami, například mocninnými, harmonickými, alternujícími nebo Fourierovými, které jsou součástí matematické analýzy a lze s jejich pomocí řešit řadu zajímavých úloh.