**Vysoká škola technická a ekonomická**

v Českých Budějovicích

**Aplikovaná matematika**

**Studijní opora pro kombinovanou formu studia**

**Garant: Doc. RNDr. Zdeněk Dušek, Ph.D.**

**Ústav technicko – technologický**

**Katedra informatiky a přírodních věd**

**Autor: RNDr. Jana Vysoká, Ph.D.**

**Tato opora vznikla na Vysoké škole technické
a ekonomické v Českých Budějovicích v rámci projektu:**

*ESF II – VŠTE, s registračním číslem: CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013339*

**Obsah**

[1 Metodika práce se studijními oporami 5](#_Toc49946943)

[2 Anotace 8](#_Toc49946944)

[3 Příprava na přednášky 16](#_Toc49946945)

[3.1 Potřebné základy matematiky 16](#_Toc49946946)

[3.2 Základní pojmy ve finanční matematice 22](#_Toc49946947)

[3.3 Časové řady 27](#_Toc49946948)

[3.4 Trend a sezónní složka 32](#_Toc49946949)

[3.5 Předpovědi v časových řadách 38](#_Toc49946950)

[3.6 Jednoduché úročení 43](#_Toc49946951)

[3.7 Složené úročení 49](#_Toc49946952)

[3.8 Nominální a reálná úroková sazba 54](#_Toc49946953)

[3.9 Úvěr 59](#_Toc49946954)

[3.10 Umořovací schéma 63](#_Toc49946955)

[3.11 Jednorozměrná analýza rizik 68](#_Toc49946956)

[3.12 Vícerozměrná analýza rizik 75](#_Toc49946957)

[3.13 Tvorba scénářů 80](#_Toc49946958)

[4 Příprava na semináře 85](#_Toc49946959)

[4.1 Potřebné základy matematiky 85](#_Toc49946960)

[4.2 Základní pojmy ve finanční matematice 89](#_Toc49946961)

[4.3 Časové řady 93](#_Toc49946962)

[4.4 Trend a sezónní složka 98](#_Toc49946963)

[4.5 Předpovědi v časových řadách 102](#_Toc49946964)

[4.6 Jednoduché úročení 108](#_Toc49946965)

[4.7 Složené úročení 112](#_Toc49946966)

[4.8 Nominální a reálná úroková sazba 115](#_Toc49946967)

[4.9 Úvěr 119](#_Toc49946968)

[4.10 Umořovací schéma 123](#_Toc49946969)

[4.11 Jednorozměrná analýza rizik 127](#_Toc49946970)

[4.12 Vícerozměrná analýza rizik 132](#_Toc49946971)

[4.13 Tvorba scénářů 133](#_Toc49946972)

# Metodika práce se studijními oporami

Studijní opory pro kombinovanou formu studia jsou určeny pro studenty Vysoké školy technické a ekonomické v Českých Budějovicích ke studiu povinných, povinně volitelných
a volitelných předmětů. Studijní opory jsou studijní pomůcka, která doplňuje výukové bloky jednotlivých předmětů, vyučovaných v programu Znalectví v magisterském studiu, především pak pro kombinovanou formu studia.

Kombinovaná výuka probíhá formou výukových bloků, kde jsou studenti v přímém kontaktu
s vyučujícím. Přímá komunikace s vyučujícím je možná nejen v rámci blokové výuky, ale
i v konzultačních hodinách a elektronicky.

Studijní opora doplňuje studentovi přímou výuku a odráží aktuální stav poznání daného předmětu.

**Součástí studijní opory jsou také anotace předmětů, které zahrnují:**

* základní informace o předmětu,
* název předmětu a jeho doporučenou dobu studia v semestru a ročníku,
* garanta předmětu a seznam vyučujících.
* způsob zakončení předmětu zkouška/zápočet,
* výukové metody a metody hodnocení,
* podmínky pro úspěšné absolvování předmětu včetně upřesnění způsobu hodnocení,
* podmínky pro úspěšné absolvování předmětu,
* cíl předmětu, vycházející z profilu absolventa,
* témata přednášek a seminářů,
* studijní zátěž studentů,
* povinnou a doporučenou literaturu, která je dostupná v knihovně VŠTE ,
* výstupy z učení, tedy teoretické znalosti, které by měl student získat studiem přednášek a praktické dovednosti, které by si měl osvojit v rámci jednotlivých seminářů.

Každá studijní opora je určena pro konkrétní předmět a jejich struktura se odvíjí od rozsahu předmětu, tedy počtu přednášek a seminářů na daný semestr. Přesný rozsah u jednotlivých předmětů najdeme ve studijním plánu. Rozsah předmětu je ve studijní opoře koncipován nikoli po týdnech, ale po dvouhodinových blocích, tzn., pokud má předmět dotaci 26p/26s, studijní opora obsahuje 13 témat přednášek a 13 témat seminářů. V tabulce níže jsou uvedeny příklady možného rozsahu.

Tabulka 1: Rozsah a počet přednášek/seminářů

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Název předmětu** | **Rozsah** | **Vysvětlení** | **Počet jednotlivých přednášek/seminářů v jednotlivé studijní opoře** |
| Finance podniku pro magisterské studium | 26p + 26s | 26 p = 26 přednášek po 45 minutách 26 s = 26 seminářů po 45 minutách | 13 přednášek po 90 min (výpočet 26:2=13) 13 seminářů po 90 min (výpočet 26:2=13) |
| Psychologie | 26p + 0s | 26 p = 26 přednášek po 45 minutách | 13 přednášek po 90 min (výpočet 26:2=13)  |

**Příprava na přednášky je zaměřena na získání teoretických znalostí a je členěna na následující podkapitoly:**

* **Klíčová slova,**
	+ nejedná se o nejčastěji použitá slova, ale slova charakterizující probírané téma.
* **Cíle kapitoly,**
	+ vztahují se ke studiu příslušné kapitoly a k tématu dané přednášky či semináře.
* **Výstupy z učení,**
	+ jedná se o číslované výstupy z učení podle anotací, tedy jaké znalosti student získá studiem příslušné kapitoly.
* **Abstrakt (příprava na přednášky),**
	+ je tematickým průřezem (výtahem) celé kapitoly.
* **Studijní literatura,**
	+ je členěna na povinnou a doporučenou literaturu a je zde uveden rozsah stran, kterým by se měl student věnovat v rámci samostudia.
* **Kontrolní otázky,**
	+ uvedeny otázky ověřující výstupy z učení, tedy získané znalosti a dovednosti.
* **Zajímavosti z dané problematiky,**
	+ odkazují na zajímavé odborné články či webové stránky, které rozšiřují znalosti studentů nad rámec jejich základních znalostí.
* **Odkaz na seminář,**
	+ odkazuje na téma semináře, které vychází ze získaných teoretických znalostí studenta.

**Příprava na semináře je zaměřena na osvojení si praktických dovedností a obsahuje:**

* **Klíčová slova (stejné, jako v případě přednášek).**
* **Cíle kapitoly (stejné, jako v případě přednášek).**
* **Výstupy z učení,**
	+ jedná se o číslované výstupy z učení podle anotací, tedy jaké dovednosti student získá studiem příslušné kapitoly.
* **Příklad, uvedení vzorového úkolu,**
	+ vzor souvislého příkladu/úkolu s vypracovaným vzorovým řešením včetně komentářů. Příklad slouží k ověření praktických dovedností studenta.
* **Zadání samostatné práce**
	+ další zadané příklady/úlohy/samostatné práce, kde cílem je prohloubit schopnost samostatné práce studenta a podpořit jeho tvůrčí a kreativní myšlení.
* **Studijní literatura (stejné, jako v případě přednášek)**

Výchozím předpokladem pro práci se studijními materiály je osvojení si obsahu výkladové části opor a schopnost aplikace teorie k řešení zadaných úkolů. Pro studenta je nezbytné seznámit se se základními pojmy a dále pracovat s povinnou a doporučenou literaturou.

# Anotace

|  |  |
| --- | --- |
| Období | 1. semestr/1.ročník |
| **Název****předmětu** | **Aplikovaná matematika** |
| Vyučovací jazyk | Český |
| Garantpředmětu  | Doc. RNDr. Zdeněk Dušek, Ph.D. |
| Garanční ústav  | Ústav technicko - technologický |
| Katedra  | Katedra informatiky a přírodních věd |
| Vyučující (přednášející)  | doc. RNDr. Zdeněk Dušek |
| Vyučující (cvičící) | RNDr. Dana Smetanová, Ph.D.RNDr. Jana Vysoká, Ph.D. |
| Ukončení předmětu  | Zkouška |
| Poznámka k ukončení |  --- |
| Rozsah | 2 (přednášky)/ 2 (cvičení) |
| Počet kreditů | 5 |
| Cíle předmětu výstupy z učení | Studijní předmět seznamuje studenty se základními pojmy, principy a početními operacemi finanční matematiky a jejich aplikacemi v konkrétních úlohách s důrazem na jejich porozumění. Cílem předmětu je poskytnout studentům exaktní nástroje pro oblast aplikací matematiky ve finanční sféře, které jsou využitelné v oblasti ekonomiky. Student je po úspěšném absolvování předmětu schopen vysvětlit základy finanční matematiky, princip úročení a anuitní počet, analyzovat časovou řadu při řešení konkrétních úloh v praxi a provádět analýzu rizik, identifikovat rizikové faktory a stanovovat významnosti rizikových faktorů. |
| Výstupy z učení  | Po úspěšném absolvování předmětu student:2.2.1 Využívá posloupnosti při řešení matematických problémů.2.2.2. Pracuje s časovými řadami, sčítá a analyzuje jejich konvergenci.2.2.3 Využívá různé druhy úročení s různou frekvencí.2.2.4 Stanoví efektivní a reálnou úrokovou sazbu.2.2.5 Vypočítá současnou a budoucí hodnotu anuity, sestaví umořovací schéma dluhu. 2.2.6 Provádí analýzu citlivosti. |
| Osnova předmětu  | Přednášky:1. Potřebné základy matematiky
2. Základní pojmy ve finanční matematice
3. Časové řady
4. Trend a sezónní složka
5. Předpovědi v časových řadách
6. Jednoduché úročení
7. Složené úročení
8. Nominální a reálná úroková sazba
9. Úvěr
10. Umořovací schéma
11. Jednorozměrná analýza rizik
12. Vícerozměrná analýza rizik
13. Tvorba scénářů

Semináře:1. Potřebné základy matematiky
2. Základní pojmy ve finanční matematice
3. Časové řady
4. Trend a sezónní složka
5. Předpovědi v časových řadách
6. Jednoduché úročení
7. Složené úročení
8. Nominální a reálná úroková sazba
9. Úvěr
10. Umořovací schéma
11. Jednorozměrná analýza rizik
12. Vícerozměrná analýza rizik
13. Tvorba scénářů
 |
| Organizační formy výuky | PřednáškySemináře |
| Komplexní výukové metody | Frontální výukaBrainstormingKritické myšlení |
| Studijní zátěž |

|  |  |
| --- | --- |
| **Aktivita** | **Počet hodin za semestr** |
| Prezenční forma | Kombinovaná forma |
| Příprava na průběžný test | 15 | 9 |
| Příprava na seminář, cvičení, tutoriál | 34 | 74 |
| Účast na přednáškách | 26 | 0 |
| Účast na semináři/cvičeních/tutoriálu/exkurzi | 26 | 16 |
| Průběžný test | 1 | 1 |
| Příprava na závěrečný test | 26 | 28 |
| Závěrečný test | 2 | 2 |
| **Celkem:** | 130 | 130 |

 |
| Metody hodnocení a jejich poměr | Průběžné hodnocení – 30 bodů (tj. 30 %)Závěrečný test – 70 bodů (tj. 70 %) |
| Podmínky pro úspěšné absolvování předmětu včetně jejich hodnocení  | Pro úspěšné splnění předmětu je nutné v součtu dosáhnout z průběžného a závěrečného hodnocení minimálně 70 % za níže stanovených podmínek. V průběžném hodnocení lze získat 30 bodů tj. 30 %. V závěrečném hodnocení lze celkem získat 70 bodů tj. 70 %. Celková klasifikace předmětu, tj. body za závěrečné hodnocení (70 - 0) + body z průběžného hodnocení (30 - 0): A 100 – 90, B 89,99 – 84, C 83,99 – 77, D 76,99 – 73, E 72,99 – 70, FX 69,99 – 30, F 29,99 – 0.Student prezenční formy studia je povinen na kontaktní výuce, tj. vše kromě přednášek, splnit povinnou 70% účast. Pokud účast nebude splněná, bude student automaticky klasifikován „F“. |
| Informace učitele | Účast na výuce ve všech formách řeší samostatná vnitřní norma VŠTE (Evidence docházky studentů na VŠTE). Pro studenty prezenční formy studia je na kontaktní výuce, tj. vše kromě přednášek, povinná 70% účast. |
| Literatura povinná  | ŠOBA, Oldřich a Martin ŠIRŮČEK. 2017. *Finanční matematika v praxi*. 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing. ISBN 978-80-9264-9 ePub. HNILICA, J., Fotr, J., 2009, *Aplikovaná analýza rizika ve finančním managementu a investičním rozhodování*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-2560-4. ARLT, J. a M. ARLTOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6.CHAN, W. S. a Y. K. TSE, 2018, *Financial Mathematics For Actuaries*, World Scientific Publishing, Singapore. ISBN-13: 978-9813224674, ISBN-10: 9813224673.GERVER R. a R. J. SGROI, 2018, *Financial Algebra: Advanced Algebra with Financial Applications,* Cengage Learning, Boston. ISBN-13: 978-1337271790, ISBN-10: 1337271799.RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P., 2013, *Finanční matematika pro každého*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-4831-3. |
| Literatura doporučená  | GUEANT, O., 2016, *The Financial Mathematics of Market Liquidity*: From Optimal Execution to Market Making, CRC Press, Boca Raton. ISBN-13: 978-1498725477, ISBN-10: 1498725473.HASTINGS, K. J. 2016, *Introduction to Financial Mathematics*, CRC Press, Boca Raton. ISBN-13: 978-1498723909, ISBN-10: 149872390X.CIPRA, T., 2008. *Finanční ekonometrie*. Praha: Ekopress. ISBN 978-80-86929-43-9.DOŠLÁ, Z.,  LIŠKA, P., 2014. *Matematika pro nematematické obory: s aplikacemi v přírodních a technických vědách*. 1. vydání. Praha: Grada Publishing, 304 stran. Expert. s. 144 - 153. ISBN 978-80-247-5322-5.MOUČKA, J. a P. RÁDL, 2015. *Matematika pro studenty ekonomie*. 2., uprav. a dopl. vyd. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-5406-2. |
| Webové stránky  | --- |
| Publikační činnost  | RNDr. Vysoká Jana, Ph.D.PLACHÝ, Jan, Roman DEDEK, Jana VYSOKÁ a Jan RANDL. USE OF VERMICULITE BOARDS IN SOUND INSULATION OF PARTITIONS. Akustika, České Budějovice: Studio D akustika s.r.o., 2019, roč. 33, s. 94-105. ISSN 1801-9064.PLACHÝ, J., VYSOKÁ J. a R. VEJMELKA, 2019. Influence of the quantity of fillers on crucial thermal-technical parameters of bitumen waterproofing sheets. In: IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Spojené království: Institute of Physics Publishing. ISSN 1757-8981.VYSOKÁ, J., 2016. Using Simple Mathematics in The Sailing Problem. Nase More. 63(3), 237-240. ISSN 0469-6255.PLACHÝ, Jan, Jana VYSOKÁ, Radek VEJMELKA a Zdeněk CAHA 2014. Correlation of water absorption values of bitumen waterproofing sheets obtained according to CSN EN 14223 and CSN 503602. COMMUNICATIONS, Žilina: University of Zilina, vol. 16, č. 4, s. 118-122. ISSN 1335-4205.[VYSOKÁ, J](https://is.vstecb.cz/auth/osoba/4083)., 2017. EXAMPLE OF MATHEMATICAL MODELING IN HIGH SCHOOLS. In: 16th Conference on applied mathematics, Aplimat 2017, Proceedings. Bratislava: Vydavateľstvo Spektrum STU Bratislava, 1704-1714. ISBN 978-80-227-4650-2.Doc. RNDr. Zdeněk Dušek, Ph.D.DUŠEK, Z., 2018. The affine approach to homogeneous geodesics in homogeneous Finsler spaces. Archivum Mathematicum (Brno) 54(4), 257-263.DUŠEK, Z., 2018. Zermelo navigation problem in geometry. Nase More 65(4), 250-253.DUŠEK, Z., 2019. The existence of homogeneous geodesics in special homogeneous Finsler spaces. Matematicki Vesnik 71,(1-2), 16-22.DUŠEK, Z., 2019. Homogeneous Randers spaces admitting just two homogeneous geodesics. Archivum Mathematicum (Brno), 55(5), 281-288.DUŠEK, Z., 2019. The existence of two homogeneous geodesics in Finsler geometry. Symmetry 11(7), 850.RNDr. Dana Smetanová, Ph.D.CHEREVKO, Yevhen, Volodymyr BEREZOVSKI, Irena HINTERLEITNER a Dana SMETANOVÁ. Infinitesimal Transformations of Locally Conformal Kähler Manifolds. Mathematics, BASEL, SWITZERLAND: MDPI, 2019, roč. 7, č. 8, s. 1-16. ISSN 2227-7390. doi:10.3390/math7080658.SMETANOVÁ, Dana. Regular Hamiltonian Systems and Its Projectability. In Szarková, Richtáriková, Letavaj. 18th Conference on applied mathematics, Aplimat 2019, Proceedings. Bratislava, Slovakia: Slovak University of Technology in Bratislava, 2019. s. 1104-1109, 6 s. ISBN 978-1-5108-8214-0.SMETANOVÁ, Dana, 2018. Higher Order Hamiltonian Systems with Generalized Legendre Transformation. Mathematics, BASEL, SWITZERLAND: MDPI, roč. 6, č. 9, s. nestránkováno. ISSN 2227-7390. doi:10.3390/math6090163.HRUBÝ, Petr, Tomáš NÁHLÍK a Dana SMETANOVÁ., 2018. Mathematical modelling of shafts in drives. Communications, Žilina: Žilinská univerzita v Žilině, EDIS, roč. 20, č. 4, s. 36-40. ISSN 1335-4205.CHLÁDEK, Petr a Dana SMETANOVÁ, 2017. Limits of Electronic Testing of Mathematical Knowledge. In Szarková, Letavaj, Richtáriková, Prašílová. 16th Conference on applied mathematics, Aplimat Proceedings. first. Bratislava: Vydavateľstvo Spektrum STU Bratislava. s. 352-358, 7 s. ISBN 978-80-227-4650-2. |
| Témata diplomových prací  | Analýza vybraných ukazatelů pomocí časových řadPosouzení finanční výkonnosti vybraného podniku pomocí analýzy časových řadNáhodná úroková míra ve finanční matematiceRekurentní metody v analýze časových řadAnalýza rizik ve vybraném podniku |

# Příprava na přednášky

## Potřebné základy matematiky

**Klíčová slova**

Posloupnost, řada a její konvergence, průměr, funkce.

**Cíle kapitoly**

Tato kapitola shrnuje výběr základních matematických pojmů, se kterými se lze ve finanční matematice setkat - s pojmy aritmetické a geometrické posloupnosti, konvergencí řady, kvalifikuje základní typy průměrů a připomíná elementární funkce, které jsou ve finanční matematice pro práci nezbytné.

**Výstupy z učení**

* 2.2.1 Využívá posloupnosti při řešení matematických problémů.

**Abstrakt**

V této kapitole se předpokládá, že student daná témata ovládá z předchozího studia a cílem je tedy pouze připomenout a osvěžit jejich význam.

* + 1. ***Posloupnost aritmetická a geometrická***

*Posloupnost* je funkce definována na množině přirozených čísel . Posloupnost označujeme zpravidla zápisem nebo v případě nekonečné posloupnosti a *n*-tý prvek posloupnosti budeme zapisovat pomocí symbolu .

*Aritmetická posloupnost* je taková posloupnost, pro jejíž každé dva po sobě jdoucí členy platí, že jejich rozdíl je konstantní, tedy

 (3.1.1)

kde se nazývá *diference* příslušná dané aritmetické posloupnosti. Pro určení -tého členu posloupnosti pak platí vztah

 (3.1.2)

a vztah mezi *r*-tým a *s*-tým členem posloupnosti je dán následovně

. (3.1.3)

Řekneme, že daná posloupnost je *rostoucí,* jestliže je-li hovoříme o *klesající* posloupnosti a v případě, kdy , se jedná o *konstantní* posloupnost.

Součet členů aritmetické posloupnosti je pak určen vztahem

. (3.1.4)

*Geometrická posloupnost* je taková posloupnost, pro kterou platí, že podíl každých dvou po sobě následujících členů je konstantní, tedy

, (3.1.5)

přičemž nazýváme *kvocientem* příslušným k dané geometrické posloupnosti. Pak platí

. (3.1.6)

Součet  členů geometrické posloupnosti je pak určen vztahem

. (3.1.7)

Je-li , pak mluvíme o *rostoucí* posloupnosti, je-li pak se jedná o *klesající* posloupnost, v případě, že , nazýváme tuto posloupnost *konstantní*.

* + 1. ***Řady***

Je dána posloupnost . Pak výraz ve tvaru se nazývá *řada*. Členy posloupnosti se nazývají *členy řady*. Pokud je posloupnost konečná, tedy, pak součtem jejích členů vznikne *konečná řada* a zapisujeme ji pomocí symbolu . Pokud je posloupnost nekonečná, pak součtem jejích členů vznikne *nekonečná řada*, zapsáno symbolicky.

Jelikož řada je definována jako součet, budeme se především zajímat o to, zda lze nebo nelze danou řadu sečíst, a pokud ano, tak jakou hodnotu má tento součet. Budeme se věnovat nekonečným řadám.

Řada se nazývá *konvergentní*, je-li jejím součtem konečné číslo. V opačném případě se nazývá *divergentní*.

Číslo se nazývá *-tý částečný součet*. Existuje-li vlastní , pak je řada konvergentní, v případě že neexistuje, pak říkáme, že řada *osciluje*. Dále platí:

Jestliže konverguje řada , pak konverguje také řada . Je-li řada konvergentní a platí a současně je řada konvergentní a její součet je roven hodnotě , pak součet řad je opět konvergentní a platí

 (3.1.8)

Nutná podmínka konvergence nekonečné řady zní následovně:

Jestliže je nekonečná řada konvergentní, pak platí

. (3.1.9)

Souhrn kritérií konvergence nekonečných řad s nezápornými členy:

1. *Srovnávací kritérium*

Nechť a jsou posloupnosti nezáporných čísel, pro které platí

 od jistého nerovnost

, (3.1.10)

pak platí:

jestliže je konvergentní, pak je také řada konvergentní,

jestliže je divergentní, pak je také řada divergentní.

1. *Podílové kritérium*

Nechť je nekonečná řada s kladnými členy a předpokládejme, že existuje vlastní nebo nevlastní limita

. (3.1.11)

Pak platí:

Tato řada je konvergentní, pokud je a tato řada je divergentní, pokud je . V případě, že , pak nelze o konvergenci rozhodnout.

1. *Odmocninové kritérium*

Nechť je řada nekonečná řada s nezápornými členy a předpokládejme, že existuje vlastní či nevlastní limita

 (3.1.12)

Pak tato řada je konvergentní, je-li , tato řada diverguje, pokud a v případě, že

, pak nelze učinit o konvergenci žádný závěr.

* + 1. ***Průměry***

Ve statistice a tedy i ve finanční matematice je řada výpočtů svázána s pojmem *průměr*, kterým lze charakterizovat danou vlastnost souboru dat. Je nutné ovšem s tímto pojmem pracovat citlivě a v daných situacích využívat odpovídající způsob určení hodnoty průměru. Odlišujeme tyto základní typy:

*Aritmetický průměr* číselných hodnot je definován hodnotou

. (3.1.13)

*Geometrický průměr* číselných hodnot je pak dán hodnotou

. (3.1.14)

*Harmonický průměr* číselných hodnot je vyjádřen hodnotou

 (3.1.15)

* + 1. ***Základní funkce***

Ve finanční matematice je řada popisovaných závislostí dána pomocí základních funkcí. Jedná se především o funkci lineární, kvadratickou, lineárně lomenou, exponenciální
a logaritmickou danými postupně předpisy , , , . Dále je nutné připomenout i skupinu funkcí goniometrických (, které se rovněž mohou v některých případech vyskytovat při popisu jevů, které se periodicky opakují. Pro práci v oblasti finanční matematiky je zcela zásadní znalost vlastností základních funkcí, o které se finanční matematika opírá.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P., 2013. *Finanční matematika pro každého*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-4831-3. (str. 9 – 23)

**Doporučená literatura**

DOŠLÁ, Z., a LIŠKA, P., 2014. *Matematika pro nematematické obory: s aplikacemi v přírodních a technických vědách*. 1. vydání. Praha: Grada Publishing, 304 stran. Expert.

ISBN 978-80-247-5322-5. (str. 31 – 51, 143 – 153)

**Kontrolní otázky**

1. Jakými způsoby může být zadána posloupnost? (popište alespoň tři).
2. Může nekonečná aritmetická posloupnost mít konečný součet? Uveďte příklad.
3. Uveďte příklady rostoucí, klesající a konstantní aritmetické posloupnosti.
4. Jakými způsoby může být zadána geometrická posloupnost?
5. Uveďte příklady rostoucí, klesající a konstantní geometrické posloupnosti.
6. Popište příklad z finančnictví, kde se můžeme setkat s posloupnostmi.
7. Uveďte příklad z finančnictví, kde se můžeme setkat s konečnou řadou.
8. Popište libovolnou reálnou situaci, kterou lze interpretovat pomocí lineární funkce.
9. Uveďte reálný případ, který lze popsat pomocí exponenciální funkce.
10. Uveďte příklad konvergentní a divergentní řady.
11. Uveďte příklad, kdy aritmetický průměr spočtený pro danou databázi je nevypovídajícím výsledkem a proto je nevhodným nástrojem pro charakteristiku souboru.

**Zajímavosti z dané problematiky**

Informace o Fibonacciho posloupnosti viz <https://finex.cz/fibonacciho-posloupnost/>

Některé speciální případy řad viz <http://math.feld.cvut.cz/mt/txte/1/txc3ea1c.htm>

Zajímavosti z oblasti harmonických řad viz

<https://cs.wikipedia.org/wiki/Harmonick%C3%A1_%C5%99ada>

**Odkaz na semináře**

4.1 Potřebné základy matematiky

## Základní pojmy ve finanční matematice

**Klíčová slova**

Časová hodnota peněz, úrok, úroková sazba, úrokové období, úročení.

**Cíle kapitoly**

Cílem této kapitoly je podat souhrn základních termínů užívaných ve finanční matematice
a vysvětlit jejich význam. Uvedené pojmy jsou důležité pro pochopení obsahu navazujících kapitol.

**Výstupy z učení**

* 2.2.3 Využívá různé druhy úročení s různou frekvencí.

**Abstrakt**

K základním termínům, které budeme potřebovat pro vysvětlení principů, na kterých je finanční matematika založena, patří pojem *časová hodnota peněz* – peníze mají v měnícím se čase různou hodnotu. Prostřednictvím finanční matematiky tak lze určit hodnotu peněz k určitému časovému okamžiku a to buď k jejich budoucí, nebo současné hodnotě. V případě výpočtu budoucí hodnoty se jedná o tzv. *úročení,* v případě výpočtu současné hodnoty pak hovoříme
o *odúročení* nebo také *diskontování*.

K základním úlohám ve finanční matematice patří výpočet *úroku*. Z pohledu *věřitele* – vkladatele je úrok odměnou za to, že poskytnul své peníze. Z pohledu *dlužníka* je úrok cena za získání peněz.

*Úroková sazba* je úrok vyjádřený v procentech (setinách) z celkové hodnoty peněz určených k podnikání – *kapitálu.* Jedná se o veličinu, která je přímo určená jistým subjektem, např. bankou.

Úrokové sazby odlišujeme dle souvisejících časových období na denní, měsíční, čtvrtletní, pololetní a roční, ve zkratkách z latinského překladu p. d., p. m., p. q., p. s., a p. a., přičemž platí, že

12 % p. a. = 6 % p. s,

12 % p. a. = 3 % p. q, (3.2.1)

12 % p. a. = 1 % p. m,

12 % p. a. = 12/365 % p. s. nebo 12 % p. a. = 12/360 % p. s.

Pozor ale na pojem *úroková míra*, který bývá s pojmem *úroková sazba* zaměňován. Jedná se totiž o veličinu vypočítanou z různých úrokových sazeb např. průměrná úroková sazba spořicích účtů. Tedy v některých situacích význam těchto dvou pojmů splývá.

V ekonomice lze rozlišit velký počet úrokových sazeb a je velmi důležité pro danou situaci zvolit tu správnou úrokovou sazbu. Každá úroková sazba se udává v procentech, ale do vztahů ve finanční matematice se dosazuje v relativním vyjádření. Například, pokud má úroková sazba hodnotu 5 %, do matematických vztahů budeme dosazovat hodnotu 0,05.

Pro vyjádření délky úrokového období se vychází z různých zvyklostí, k nejvíce rozšířeným standardům patří následující metody:

*Anglický standard* – v případě přestupného roku počítá s 366 dny, jinak s 365 dny a počítá se skutečnými počty dní v každém měsíci, označuje se symbolem ACT/365,

*Francouzský standard* – počítá se skutečným počtem dní v měsíci a s 360 dny v roce, je značen symbolem ACT/360,

*Německý standard* – každý měsíc má 30 dní a každý rok má 360 dní, označuje se jako 30E/360.

Úrokové sazby lze dělit dále dle těchto dvou hledisek:

* přihlíží se na vliv zdanění úrokových příjmů a rozlišujeme *hrubou úrokovou sazbu*
a *čistou úrokovou sazbu*.
* zohledňuje se vliv působení inflace a odlišujeme dva typy sazeb – *nominální úrokovou sazbu* a *reálnou úrokovou sazbu.*

Vztah mezi čistou úrokovou sazbou - *Rč* a hrubou úrokovou sazbou – *Rh* lze vyjádřit následovně

, (3.2.2)

přičemž vyjadřuje sazbu daně z příjmu.

Nominální úroková sazba nebere v úvahu vliv *inflace* – vyjadřující snížení kupní síly peněz v dané ekonomice. Reálná úroková sazba s vlivem inflace kalkuluje. Vztah mezi nominální úrokovou sazbou – *Rn* a reálnou úrokovou sazbou – *Rr* lze vyjádřit pomocí následujícího vztahu

, (3.2.3)

kde představuje míru inflace. Více se tomuto tématu věnuje kapitola 3.8.

Dalším důležitým pojmem, na který je třeba při výpočtu výše úroku brát zřetel, je určení *úrokového období*. Úrokové období je doba, za kterou se připočítávají úroky, tato doba pak určuje *frekvenci úročení*.

Na základě znalosti výše úroku – označme jeho hodnotu *U*, výše kapitálu – *K*, úrokové sazby za dané úrokové období – *r* a počtu úrokových období úročení kapitálu – *t*, lze představit vztah pro výpočet výše úroku v peněžních jednotkách následovně

 (3.2.4)

V kapitolách 3.6 a 3.7 budeme věnovat pozornost analýze pojmů *jednoduché a složené úročení,* které klasifikují další důležité rozdělení úročení z pohledu toho, jakým způsobem dochází k  procesu úročení. Jednoduše řečeno, v případě jednoduchého úročení dochází k úročení stále původního kapitálu, ovšem složené úročení zahrnuje kromě úročení původního kapitálu také úročení dříve připsaných úroků.

Poslední zde zmiňované pojmy, které finanční matematika ve svých analýzách využívá, jsou pojmy *procento a procentní bod*. Tyto termíny bývají ve svých významech často zaměňovány. Tedy procento je údaj vyjadřující změnu vynásobenou stem a procentní bod je rozdíl hodnot po změně a před změnou v procentech.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ŠOBA, Oldřich a Martin ŠIRŮČEK. 2017. *Finanční matematika v praxi*. 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing. ISBN 978-80-9264-9 ePub. (str. 11 – 27)

**Doporučená literatura**

RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P., 2013, *Finanční matematika pro každého*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-4831-3. (str. 24 – 27)

**Kontrolní otázky**

1. Vysvětlete pojem časová hodnota peněz a uveďte příklady nějaké reálné situace.
2. Jakým způsobem souvisí pojmy úrok, úroková sazba a úročení?
3. Uveďte na příkladu rozdíl mezi hrubou úrokovou sazbou a čistou úrokovou sazbou.
4. Má vyšší hodnotu 10 000 Kč získaných dnes nebo 11 000 Kč obdržených za rok při roční úrokové sazbě 15 %?
5. Vyjádřete v rocích celé měsíce únor a březen dle jednotlivých standardů v případech, kdy se nejedná o přestupný rok.
6. Na účet se čtvrtletním úrokovým obdobím a s úrokovou sazbou 4 % p. a. bylo uloženo 1 000 Kč, sazba daně z úrokových příjmů je 15 %. Jaký úrok připíše banka na účet za 3 měsíce?
7. Je doba uložení kapitálu (z pohledu finančních vzorců) stejná pro všechny bankovní standardy?
8. Uveďte příklad situace, kdy je doba určená pomocí standardu 30E/360 stejná jako u standardu ACT/365.
9. Uveďte příklad situace, kdy jsou doby určené pomocí standardů 30E/360
a ACT/365 odlišné.
10. Který standard by byl nejvýhodnější, pokud máme prostředky uloženy od 15. února do 31. března?

**Zajímavosti z dané problematiky**

O historii peněz viz

<https://www.odmaturuj.cz/ekonomie/historie-penez-2/>

Názory na to, jak učit ekonomii viz

<https://www.penize.cz/ekonomika/322372-ocima-expertu-jak-ucit-ekonomii>

**Odkaz na semináře**

4.2 Základní pojmy ve finanční matematice

## Časové řady

**Klíčová slova**

Okamžitá a intervalová časová řada, diference, koeficient růstu.

**Cíle kapitoly**

Záměrem této kapitoly je seznámit studenty se základy problematiky časových řad, s postupy pro určení jejich charakteristik a ukazatelů jejich průběhu.

**Výstupy z učení**

* 2.2.2 Pracuje s časovými řadami, sčítá a analyzuje jejich konvergenci.

**Abstrakt**

*Časovou řadou* rozumíme řadu hodnot určitého ukazatele, jednoznačně uspořádaných
z hlediska přirozené časové posloupnosti, tedy ve směru od minulosti do přítomnosti. *Délkou časové řady* rozumíme celkový počet pozorování.

Pomocí časových řad lze shromažďovat statistická data charakterizující přírodovědné, společenské a ekonomické jevy a vytvářet prognózy trendu jejich vývoje. S chronologicky uspořádanými daty se lze setkat v různých oblastech reálného života – v biologii, ve fyzice, v medicíně, ve společenských vědách, kde se jedná o demografické a sociologické časové řady zobrazující například změny v počtu obyvatelstva, vývoj porodnosti nebo rozvodovosti. Časové řady jsou ovšem velmi významnou složkou v ekonomii – v oblasti makroekonomické například při analýze užití hrubého domácího produktu, inflace, nezaměstnanosti nebo při určování některých dílčích ukazatelů jako jsou například vývoj kurzů cizích měn nebo ceny akcií na kapitálovém trhu.

Cílem analýzy časových řad je tedy určení modelu, podle něhož jsou sledovaná data generována. Znalost tohoto modelu pak umožňuje nejen předvídat budoucí vývoj systému, ale do jisté míry i řídit a optimalizovat chování systému vhodnou volbou vstupních parametrů
a počátečních podmínek.

Časové řady vztahující se k ekonomickým ukazatelům je možné rozdělit podle následujících kritérií:

* podle časového hlediska na *časové řady okamžikové a intervalové*,
* podle periodicity na časové řady *dlouhodobé* (převážně roční) a *krátkodobé*, kdy jsou jednotlivé údaje zaznamenávány v kratších časových úsecích (čtvrtletně, měsíčně, týdenně, denně),
* podle druhu sledovaných ukazatelů na časové řady *primárních* a *sekundárních (odvozených) charakteristik*,
* podle způsobu vyjádření na časové řady ukazatelů *naturálních* a *peněžních*.

Jestliže časové řady charakterizují sledovaná data v daném časovém okamžiku, pak je nazýváme *okamžikovými,* například počet nových zaměstnanců ve výrobním podniku ke konci roku.

 Časové řady nazýváme *intervalovými*, jestliže popisují sledovaná data v daném časovém intervalu, přičemž tyto intervaly musí být stejně dlouhé. Ve výrobních podnicích se jedná například o řady zachycující roční tržby, v datech statistického úřadu například počty narozených dětí, počty sňatků a rozvodů v jednotlivých letech. Údaje intervalových časových řad lze pak sčítat a tímto způsobem vytvářet součty za více období.

Časové řady je pro přehlednost vhodné znázorňovat pomocí grafů, protože pak je snadnější posuzovat, jaký bude její další vývoj, přičemž je nutné rozlišovat, jaký typ časové řady je právě analyzován. Okamžikové časové řady je možné znázornit pouze spojnicovými grafy. Intervalové časové řady pak znázorňujeme pomocí sloupkových, hůlkových nebo spojnicových grafů.

Na základě grafů z daných dat lze v prvním okamžiku provést předběžnou charakteristiku dat pomocí vizuální analýzy grafu, ale pro profesionální posouzení je vhodné použít odpovídající matematický aparát.

K základním postupům při určování charakteristik časových řad patří využití aritmetického průměru z hodnot modelovaného ukazatele v čase *t* pro *n* období, tedy jedná se o hodnotu danou následovně:

. (3.3.1)

V případě, kdy první diference oscilují kolem jisté konstanty, lze o časové řadě říci, že má *lineární trend* a z tohoto důvodu ji lze popsat pomocí přímky.

Průměr okamžikových časových řad pak lze určit následovně:

. (3.3.2)

Dalším nástrojem pro charakteristiku časové řady je *první diference*, která je dána rozdílem dvou po sobě následujících hodnot časové řady. Pomocí první diference pak lze vyjádřit přírůstek hodnoty časové řady vzhledem k danému časovému období. První diference je dána následujícím vztahem:

 (3.3.3)

Ze získaných hodnot prvních diferencí pak lze určit hodnotu dalšího ukazatele – *průměru prvních diferencí,* který vyjadřuje, o kolik se průměrně změnila hodnota časové řady za jednotkový interval:

 (3.3.4)

K dalším způsobům, jak popsat časovou řadu, patří určení *koeficientu růstu* ve tvaru

 (3.3.5)

který vyjadřuje rychlost růstu či poklesu udávaných hodnot časové řady. Tento koeficient popisuje, kolikrát se změnila – zvýšila či snížila hodnota časové řady v daném časovém okamžiku vzhledem k okamžiku předcházejícímu. V případě oscilace získaných hodnot kolem jisté konstanty lze časovou řadu aproximovat pomocí exponenciální funkce.

Pomocí výše uvedeného koeficientu lze určit také průměrný koeficient růstu vyjadřující průměrnou změnu koeficientů růstu za jednotkový časový okamžik jako geometrický průměr získaných dat následovně:

 (3.3.6)

Hodnota pak vyjadřuje tempo růstu v procentech a *průměrné tempo růstu* je dáno hodnotou Koeficient přírůstku je pak vyjádřen hodnotou

 (3.3.7)

a jeho průměrná hodnota je pak rovna Průměrné tempo přírůstku je určeno hodnotou

 ( (3.3.8)

Navazující kapitoly se věnují analýze a prognózování dat, které daná časová řada obsahuje. Před tímto procesem je nutné ověřit, zda jsou jednotlivé ukazatele věcně, prostorově a časově srovnatelné. Tedy stručně řečeno, sledovaný ukazatel má stále stejný obsahový význam, časové intervaly musí být totožných délek a údaje se musí vztahovat ke stejnému geografickému celku.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ARLT, J. a M. ARLTOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (str. 11 – 19)

**Doporučená literatura**

CIPRA, T., 2008. *Finanční ekonometrie*. Praha: Ekopress. ISBN 978-80-86929-43-9.

(str. 227 – 248)

**Kontrolní otázky**

1. Charakterizujte časovou řadu.

2. Uveďte příklady využití analýzy časových řad.

 3. Jaké druhy časových řad znáte?

4. Charakterizujte časové řady intervalové.

5. Charakterizujte a uveďte příklady časové řady okamžikové.

6. K čemu slouží první diference?

7. Jaký ukazatel je s ohledem na spolehlivost hodnocení časové řady významný?

8. K čemu je výhodný ukazatel diference časové řady?

9. Proč se vyplatí sledovat koeficient přírůstků?

10. Charakterizujte dělení koeficientů přírůstku.

**Zajímavosti z dané problematiky**

Zajímavosti o inflaci viz

<https://financer.com/cz/inflace/>

**Odkaz na semináře**

4.3 Časové řady

## Trend a sezónní složka

**Klíčová slova**

Trend, sezónní, cyklická a náhodná složka.

**Cíle kapitoly**

Kapitola přináší klasifikaci časových řad a seznamuje se klíčovými složkami dekompozice časové řady. Student se seznámí se základní charakteristikou jednotlivých trendů.

**Výstupy z učení**

* 2.2.2 Pracuje s časovými řadami, sčítá a analyzuje jejich konvergenci.

**Abstrakt**

Výběr metody, jejímž cílem je analýza časové řady, je ovlivněn celou řadou faktorů jako je například typ pozorované řady, účel výzkumu, schopnosti využívat metody statistického zpracování dat.

Vzhledem k tomu, že časové řady jsou složeny z výsledků pozorování, která jsou prováděna v diskrétních časových okamžicích, je nutné vzít v úvahu následující fakta. Některá data jsou diskrétní svým charakterem např. souhrnná produkce za daná období nebo je nutné tato data diskretizovat. Tento proces lze provést podle typu časové řady průměrováním hodnot v daném časovém intervalu, diskretizací hodnot spojitě se měnící veličiny nebo shromážděním hodnot za dané časové období.

Při analýze časových řad se mohou nepříznivě projevit problémy spojené s kalendářem vzhledem k různým délkám měsíců či počtem pracovních dnů. Proto se v takových případech zavádí tzv. *standardní měsíc* o délce 30 dnů apod.

***3.4.1 Dekompozice časové řady***

 Každou časovou řadu lze popsat pomocí čtyř základních složek

* trend – Tr,
* sezónní složka – Sz,
* cyklická složka – C,
* náhodná složka – e.

Trendová složka se měří ve stejných jednotkách jako časová řada a jinak jsou ostatní složky bezrozměrné.

*Trend* představuje dlouhodobé změny v průměrném chování řady, tedy dlouhodobý pokles či růst nebo konstantní chování. Trend je ovlivněn a způsoben faktory působícími stále stejným směrem.

*Sezónní složka* vyjadřuje pravidelně se opakující změny v časové řadě, které způsobují odchylky od trendové složky, ke kterým dochází během daného období a pravidelně se opakují. Tyto změny se obvykle vztahují ke střídání jistých období například ročních.

*Cyklická složka* pak reprezentuje pohyb okolo trendu, kdy může docházet k pravidelnému střídání fází poklesu či růstu. Délka cyklu i intenzita jednotlivých fází se mohou v průběhu času měnit a příčiny tohoto střídání často nelze určit.

*Náhodná složka* zahrnuje náhodné fluktuace, které nemají pevnou vazbu na sledovaný systém a představuje například chyby měření, zaokrouhlovací chyby atd. Říká se, že náhodná složka má charakter *bílého šumu* tzn., že je tvořena hodnotami nezávislých náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a jistým konstantním rozptylem.

Předpokládejme, že je dána časová řada Dekompozice časové řady pak může představovat tyto dva případy:

1. *Aditivní* má tvar

. (3.5.1)

1. *Multiplikativní* je tvaru

. (3.5.2)

K dalším postupům se řadí *Boxova-Jenkinsonova metodologie, Lineární kauzální modely*
a *Spektrální analýza časových dat.* Studium a popis těchto metod není obsahem předmětu.

V další části kapitoly budeme věnovat pozornost aproximaci trendu pomocí matematických funkcí. Zde se předpokládá, že student zná princip metody nejmenších čtverců a způsob jejího využití pro odhadování parametrů regresních funkcí.

***3.4.2 Subjektivní metody analýzy trendu***

Tyto metody jsou založeny na analýze grafů, umožňují danou časovou řadu vyrovnat, ale nepomohou při sestavování předpovědi. Nejčastěji se postupuje tak, že se středy předpokládaných cyklů proloží jednoduchou křivkou.

* + 1. ***Aproximace matematickými funkcemi***

K aproximaci se nejčastěji samozřejmě v závislosti na typu situace volí následující matematické funkce:

1. konstantní funkce
2. lineární funkce
3. kvadratická funkce
4. exponenciální funkce
5. logistická funkce
6. Gompertzova funkce
	* 1. ***Trend časové řady***

Nejužívanější metodou odhadu parametrů trendových funkcí je metoda nejmenších čtverců, která je použitelná v případě, kdy trendová funkce je lineární v parametrech (jedná se o lineární regresní model).

Charakteristikou, která dobře posoudí vhodnost zvolené regresní funkce, je tzv. *index determinace*. Pomocí něj lze posoudit, jak dobře zvolená regresní funkce funkční závislost mezi závisle a nezávisle proměnnou vystihuje. Index determinace nabývá hodnot z intervalu od nuly do jedné. Čím blíže je hodnota k jedné, tím více považujeme závislost za silnější, což znamená vhodně zvolenou regresní funkci. V opačném případě je zvolená regresní funkce méně výstižná.

Provedeme stručný souhrn charakteristik jednotlivých trendů:

*Lineární trend*

Je nejčastěji používaným typem trendové funkce. Můžeme ji použít vždy, chceme-li alespoň orientačně určit základní směr vývoje časové řady a rovněž může sloužit v omezeném časovém intervalu jako vhodná aproximace jiných trendových funkcí.

Má tvar

, (3.5.3)

kde jsou parametry a je časová proměnná. K odhadu používáme metodu nejmenších čtverců.

*Parabolický trend*

, (3.5.4)

kde jsou parametry a je časová proměnná, je poměrně často používaný typ trendové funkce. Je lineární z hlediska parametrů a proto se k jejich odhadu používá metody nejmenších čtverců.

*Exponenciální trend*

 (3.5.5)

kde, .

Danou rovnici je nutné upravit logaritmováním a pak lze k odhadu parametrů využít metody nejmenších čtverců.

*Logistický trend*

 (3.5.6)

kde , .

Logistická trendová funkce byla původně odvozena jako křivka vyjadřující biologický růst populací za podmínek omezených zdrojů. V ekonomické oblasti se tato křivka začala používat v modelech poptávky po předmětech dlouhodobé spotřeby a s úspěchem se také používá například při modelování vývoje, výroby a prodeje některých druhů výrobků.

* + 1. ***Sezónní očišťování***

Cílem procedury sezónního očištění je oddělit sezónní složku, čímž zůstane složka trend-cyklus a nepravidelná složka. Z tohoto důvodu budou ostatní vlivy na časovou řadu zřetelnější a bude umožněno snadnější srovnání po sobě jdoucích pozorování, zejména za účelem rozpoznání krátkodobých tendencí (v rámci jednoho roku). Původní řady jsou využitelné zejména v případech, kdy nás zajímá současná čtvrtletní nebo měsíční hladina indikátoru.

 Sezónně očištěná data slouží především jako srovnávací nástroj k porovnání krátkodobých pohybů jednotlivých období roku jedné časové řady mezi sebou, ke srovnání časových řad s rozdílným sezónním průběhem a také k mezinárodnímu srovnání. Sezónní vlivy jsou většinou oproti ostatním pravidelné a poměrně velké, takže mohou být s důvěrou odstraněny a tak je výrazně zvýšena využitelnost dat. Je ale nutné mít na paměti, že odhady dat trendu a sezónně očištěných dat zejména na konci řady (tedy nejnovější) jsou předmětem revizí a závislé na budoucích hodnotách. Proto se pro potvrzení vývoje doporučuje mít k dispozici dalších 3 až 6 pozorování.

Na tomto místě je vhodné zmínit *Wintersovu metodu*, která je vhodná k odhadu sezónní složky a je v podstatě zobecněním metody, která používá exponenciálního vyrovnávání.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ARLT, J. a M. ARLTOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (str. 11 – 23)

**Doporučená literatura**

CIPRA, T., 2008. *Finanční ekonometrie*. Praha: Ekopress. ISBN 978-80-86929-43-9.

(str. 258 – 274)

**Kontrolní otázky**

1. Charakterizujte model časové řady.
2. Charakterizujte složky časových řad.
3. Co je to trend časové řady?
4. Charakterizujte sezónní složku časové řady.
5. Charakterizujte důvod sledování cyklické složky časové řady.
6. K čemu slouží náhodná složka časové řady?
7. Charakterizujte nejčastěji využívaný trend?
8. Nakreslete lineární a parabolický trend časové řady.
9. Charakterizujte a nakreslete trend exponenciální a logistický.
10. K čemu lze využít metody nejmenších čtverců při trendové analýze časové řady?

**Zajímavosti z dané problematiky**

Sezónní očišťování viz

<https://nb.vse.cz/~arlt/publik/AS_UPSOECR_95.pdf>

**Odkaz na semináře**

4.4 Trend a sezónní složka.

## Předpovědi v časových řadách

**Klíčová slova**

Bodová a intervalová předpověď, průběh trendu časové řady, míra kvality předpovědi.

**Cíle kapitoly**

Cílem kapitoly je představit možnosti způsobů předpovědí v časových řadách a seznámit studenty s analýzou trendové a sezónní složky.

**Výstupy z učení**

* 2.2.2 Pracuje s časovými řadami, sčítá a analyzuje jejich konvergenci.

**Abstrakt**

Předpovědi v časových řadách rozlišujeme na dva druhy a to *bodové* a *intervalové.*

*Bodová předpověď* udává bodový odhad hodnoty časové řady v jistém budoucím okamžiku.

*Intervalová předpověď* je obdobouurčení intervalu spolehlivosti. Tato opora se zabývá pouze studiem bodové předpovědi.

Volba metody pro předpověď závisí na mnoha faktorech například na časovém horizontu předpovědi, požadované přesnosti, vlastnosti vstupních dat, ale především na požadované formě předpovědi.

*Chybu předpovědi v čase t* budeme definovat následovně vztahem

 (3.4.1)

kde zastupuje skutečně naměřenou hodnotu v čase *t* a znamená předpověď této hodnoty v časovém okamžiku těsně předcházejícím.

*Klouzavý průměr* nebo také „simple moving average" (MA) patří k jedné ze základních prověřených a často používaných vstupních a výstupních strategií (většinou však v kombinaci ještě s dalšími strategiemi či podmínkami pro vstup a výstup do trhů/z trhů např. výše ceny). Jedná se o strategii poměrně silnou a spolehlivou. Metoda klouzavých průměrů je vhodná pro práci s řadami, jejichž trend podléhá změnám v čase. Proto nelze aproximovat časovou řadu jako celek, ale použít například polynom k vyrovnání kratších úseků řady. V tomto případě se již předpokládá, že je původní časová řada očištěna od sezónních a cyklických vlivů.

Metoda klouzavých průměrů potřebuje dva parametry.

* délku klouzavých průměrů,
* řád klouzavých průměrů.

Délka klouzavých průměru udává reálnou délku vyrovnávacích úseků časové řady a řád klouzavých průměrů představuje stupeň vhodného vyrovnávacího polynomu. Postup je podrobněji popsán v doporučené literatuře a jeho pochopení vyžaduje jisté znalosti z numerické matematiky.

Na závěr připomínáme následující vztah, platí:

 (3.5.1)

 je uzavírací cena *k*-intervalů obchodních dnů,

 je počet dnů, na jehož základě klouzavý průměr počítáme.

Klíčovým bodem je pak dosažení předpovědi, která velmi přesně aproximuje realitu. Z tohoto důvodu je třeba vzít v úvahu všechny sestavené předpovědi. V reálné praxi jsou nejčastěji využívány následující *míry kvality předpovědi*:

* *Míra* *SSE* – *součet čtvercových chyb*
* *Míra MSE – průměrná čtvercová chyba*
* *Míra MAD – průměrná absolutní odchylka*
* *Míra MAPE – průměrná absolutní chyba v procentech*

Základními *charakteristikami časových řad* z pohledu klasické pravděpodobnosti jsou konstanty, jejichž přesná hodnota není známa, ale empirické charakteristiky jsou náhodné veličiny neboli odhady teoretických charakteristik.

K základním charakteristikám časové řady patří:

1. *střední hodnota*
2. *rozptyl*
3. *autokovarianční funkce řádu k*
4. *autokorelační funkce řádu k*

Odhady teoretických charakteristik pak představují:

1. *aritmetický průměr*
2. *odhad rozptylu*
3. *odhad autokovarianční funkce*
4. *odhad autokorelační funkce*

Analýzu trendových funkcí lze rozdělit do dvou navazujících etap. První etapou je stanovení trendové funkce. V ekonomických prognózách se jedná zpravidla o neperiodické časové řady
s náhodným kolísáním. K jejich vyrovnání se používá řady funkcí, z nichž nejčastěji používané jsou funkce lineární, mocninné, exponenciální, kvadratické a hyperbolické.

*Lineární trendová funkce* se pro její jednoduchost může využít pro vyjádření vývoje prognózovaných veličin, jestliže absolutní přírůstky meziročních změn dané proměnné jsou přibližně konstantní a jestliže jsou předpoklady pro obdobný vývoj i vně intervalu napozorovaných hodnot.

*Mocninná funkce* umožňuje vyjádřit nelineární průběh vývoje prognózovaného jevu, a to jak progresivně, tak degresivně rostoucí anebo klesající. Relativní přírůstky jsou konstantní.

*Semilogaritmická funkce* se používá zejména v těch případech, kdy rychlý pokles nebo růst příslušné proměnné je následován poklesem nebo růstem pozvolným, který v budoucnu bude znamenat spíše stagnaci.

*Exponenciální funkce* je vhodnou trendovou funkcí v těch případech, kdy absolutní přírůstky rostou, a vývoj probíhá geometrickou řadou. Poněvadž se hodnota prognózované proměnné
s délkou prognostického horizontu výrazně mění, případná extrapolace pro toto období musí být doložena podrobným věcným rozborem. Z těchto důvodů se používá zejména ke krátkodobým nebo střednědobým prognózám.

*Kvadratická trendová funkce* se s odpovídajícími výsledky používá pro vyjádření základní změny ve vývoji, kdy se pozitivní přírůstky mění v negativní a naopak. Pokud tato změna nenastane, i když v intervalu napozorovaných hodnot může být kvadratická funkce vhodná, případně extrapolace vede k nesprávným nebo ekonomicky bezobsažným výsledkům.

*Hyperbolická trendová funkce* se při prognózách uplatňuje tehdy, jestliže se průběh časové řady zezdola nebo seshora asymptoticky blíží k určité konstantní hodnotě. V ekonomických prognózách se zpravidla jedná o hodnotu, která udává závislosti na předmětu prognózy.

Příklady jednoduchých modelů jsou představeny v seminářích 4.4 a 4.5.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ARLT, J. a M. ARLTOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (str. 2 – 43)

**Doporučená literatura**

CIPRA, T., 2008. *Finanční ekonometrie*. Praha: Ekopress. ISBN 978-80-86929-43-9.

(str. 274 – 305)

**Kontrolní otázky**

1. Charakterizujte význam prognózování.

2. Jaké spatřujete výhody pro předpověď prostřednictvím analýzy časových řad.

3. Vyjmenujte hlavní funkce analýzy časových řad.

4. K čemu slouží analýza trendových funkcí?

5. Nakreslete hyperbolický trend.

6. V čem spočívá význam semilogaritmické funkce?

7. Jaká trendová funkce je vhodná pro předpověď pro střednědobý horizont?

8. V jakém trendu jsou konstantní přírůstky sledovaného jevu?

9. Nakreslete mocninnou funkci a charakterizujte její význam pro budoucí prognózy. 10. Jaký je význam časových řad pro prognózování?

**Zajímavosti z dané problematiky**

Ekonomie z pohledu neekonoma viz

<https://vesmir.cz/cz/casopis/archiv-casopisu/1994/cislo-7/ekonomie-z-pohledu-neekonoma.html>

**Odkaz na semináře**

 4.5 Předpovědi v časových řadách

## Jednoduché úročení

**Klíčová slova**

Předlhůtní úročení, polhůtní úročení, úrok, úroková míra, diskont, skonto, úrokový dělitel.

**Cíle kapitoly**

Cílem kapitoly je připomenout studentům postupy používané při jednoduchém úročení, seznámit je s rozdíly mezi úročením a bankovním diskontem, postupem při výpočtu úroků na běžných účtech a při posuzování výhodnosti skonta.

**Výstupy z učení**

* 2.2.3 Využívá různé druhy úročení s různou frekvencí.

**Abstrakt**

*Jednoduché úročení* je způsob úročení, kdy úroky jsou připisovány pouze z původního kapitálu a nezohledňují se úroky připočítávané za uplynulá úroková období. Jednoduché úročení má základní rozdělení na *jednoduché úročení polhůtní (dekursivní)* a *předlhůtní (anticipativní)* podle kritéria, jakým způsobem jsou úroky připisovány.

***3.6.1 Jednoduché úročení polhůtní***

Jednoduché úročení polhůtní je typ úročení, kdy jsou úroky připisovány na konci úrokového období a jsou určovány z počáteční hodnoty kapitálu. Označíme-li původní hodnotu kapitálu *PV,* úrokovou sazbu za dané úrokové období *r* a počet úrokových období úročení kapitálu *t*, pak výše úroku *U* je dána vztahem

 (3.6.1)

a budoucí hodnota kapitálu označená *FV* bude mít následující hodnotu

. (3.6.2)

Tedy s využitím znalosti předchozího vztahu jsme schopni odvodit následující relace pro výpočet současné hodnoty kapitálu, úrokové sazby za úrokové období a počet úrokových období následovně:

 (3.6.3)

 (3.6.4)

 (3.6.5)

Jestliže vyjádříme v základní rovnici splatnost a úrokovou sazbu ve dnech a v procentech, lze rovnici přepsat takto:

 (3.6.6)

Je-li a pak bude mít hodnotu

Výraz se nazývá *úrokovací faktor* nebo také *úročitel*, který udává, za kolik vzroste 1 Kč za 1 rok při úrokové sazbě *r*.

V případech, kdy je úroková míra zadána v procentech a počet úrokových období ve dnech, lze určit hodnotu *U* takto:

 (3.6.7)

Úrok lze vypočítat také pomocí tzv. *úrokového čísla*, které je definováno jako

 (3.6.8)

a úrokový dělitel je dán poměrem

, (3.6.9)

pak hodnota úroku je určena poměrem uvedených veličin. Tento způsob výpočtu úroku lze využít při výpočtech splatných částek u cenných papírů nebo při účtování v případě běžných
a kontokorentních účtů.

***3.6.2 Jednoduché úročení předlhůtní***

Jednoduché úročení předlhůtní je způsob úročení, kdy jsou úroky vypočítávány z budoucí hodnoty kapitálu. Tento způsob úročení se v praxi používá především při odkupu krátkodobých pohledávek před jejich splatností či krátkodobých cenných papírů. V této souvislosti je vhodné zmínit termín *diskontování*, což je způsob, na jehož základě je určena současná hodnota kapitálu, která bude majiteli vyplacena. Pro výpočet této hodnoty je třeba znát následující údaje:

* budoucí hodnoty faktorů plynoucích z aktiva v době jeho splatnosti,
* předlhůtní úrokové sazby neboli diskontní sazby,
* zbytkovou dobu do splatnosti aktiva.

Současnou hodnotu kapitálu vypočteme následovně:

 (3.6.10)

Tomuto procesu říkáme *diskontování* a výraz pro , *r* v setinách a pro nabývá hodnoty

 (3.6.11)

nazývá se *diskontním faktorem* a udává současnou hodnotu 1 Kč splatné za 1 rok při úrokové sazbě *r*.

Termín *prodej pohledávek* bývá dle české právní normy nahrazován termínem *postoupení pohledávky.*

Předlhůtní úročení je dáno následující formulí:

 (3.6.12)

kde symbol zastupuje *anticipativní* neboli *diskontní úrokovou sazbu* za dané úrokové období. Diskontní sazba se může během všech období měnit v závislosti na několika faktorech např. důvěryhodnost dlužníka nebo díky tzv. *zpětnému postihu.*

V rámci diskontování je obvykle používána roční úroková sazba a proměnná *r* je většinou zadána v letech. Z výše uvedeného vztahu plyne, že při diskontování je z budoucí hodnoty v době splatnosti strhávána částka Tato částka se nazývá *diskont* a představuje výši předlhůtního úroku.

Posledním termínem, kterému se tato kapitola věnuje, je *skonto.* Skonto je definováno jako sleva, kterou poskytuje prodávající kupujícímu v situaci, kdy kupující platí za odebrané zboží okamžitě nebo během předem domluvené krátké doby. Výše skonta je většinou určena v procentech z prodejní ceny a je spojena se splněním podmínky předchozí platby.

Odpověď na otázku, zdali je skonto výhodné, lze získat dvěma způsoby:

1. srovnáním absolutní výše skonta a úroku,
2. srovnáním relativní výše skonta a úroku.

Tomuto tématu se budeme věnovat v Semináři 4.6 formou ukázkového příkladu.

***3.4.3 Úročení běžných účtů***

Výše definovaný pojem *úrokové číslo* slouží k úročení na běžných účtech, protože v rámci úrokového období spojeného s daným účtem obvykle dochází ke změně jeho zůstatku často také denně podle toho, jak jsou na účet připisovány či odepisovány příchozí a odchozí platby. Použití základní rovnice vztahující se k jednoduchému úrokování by bylo v těchto případech komplikované, a proto je výše připisovaná dle uvedeného vztahu rozumně zvolená.

Pro výpočet úroků na běžných účtech lze rozlišit následující postupy.

* zůstatkový způsob neboli anglická metoda,
* postupný způsob neboli německá metoda,
* zpětný způsob neboli francouzská metoda.

V případě zůstatkového způsobu se úroková čísla počítají z jednotlivých zůstatků na účtu,
u postupného a zpětného způsobu se získávají z jednotlivých plusových či minusových obratů na účtu, podrobněji viz Povinná literatura.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ŠOBA, Oldřich a Martin ŠIRŮČEK. 2017. *Finanční matematika v praxi*. 2., aktualizované
a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing. ISBN 978-80-9264-9 ePub. (str. 29 – 49)

**Doporučená literatura**

RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P., 2013, *Finanční matematika pro každého*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-4831-3. (str. 27 – 40)

**Kontrolní otázky**

1. Jaké znáte typy jednoduchého úročení a jak se principiálně liší?
2. Jaké znáte aplikace pro jednotlivé typy úročení?
3. Vysvětlete pojem diskontování a diskontní sazba.
4. Vysvětlete pojem skonto.
5. Co je to úrokové číslo a úrokový dělitel? V čem je lze použít?
6. Popište způsoby používané pro výpočet úroků na běžných účtech.
7. Jaké jsou úrokové náklady úvěru ve výši 100 000 Kč jednorázově splatného za 240 dní včetně úroku, je-li úroková sazba 9 % p. a.?
8. Jaký bude stav vkladu 1 420 000 Kč za sedm měsíců při úrokové sazbě 1,5 %

p. a.?

1. Která možnost je výhodnější při nákupu daru v ceně 48 500 Kč nebo s ročním zpožděním zaplatit 51 000 Kč (sazba 4,2 % p. a.)?
2. Jakou sumu se splatností 4 měsíce si můžeme půjčit, máme-li možnost po této době použít na splacení úvěru a úroků částku 10 000 Kč při úrokové sazbě 0,09 p. d.?

**Zajímavosti z dané problematiky**

Zábavná ekonomie viz

<https://www.cupress.cuni.cz/ink2_ext/index.jsp?include=podrobnosti&id=309449>

**Odkaz na semináře**

4.6 Jednoduché úročení

## Složené úročení

**Klíčová slova**

Složené úročení, spojité úročení, kombinované úročení, efektivní míra*.*

**Cíle kapitoly**

Cílem kapitoly je analyzovat pojem složené úročení, seznámit studenty s výpočty při úročení pro různé délky úrokových období a porovnáváním finančních produktů s různou délkou úrokových období.

**Výstupy z učení**

* 2.2.3 Využívá různé druhy úročení s různou frekvencí.

**Abstrakt**

*Složené úročení* je takový proces, při kterém se úročí nejen původní vklad, ale i úroky připisované v předchozích úrokových obdobích. Jedná se tedy o úroky z úroků. Ve srovnání s jednoduchým účetnictvím se v případě složeného úročení aplikuje pouze úročení polhůtního typu. Úroky jsou tedy připisovány na konci úrokového období a jsou vypočítávány ze současné hodnoty kapitálu. Uvedeme ukázku na příkladu při 5 % úročení částky 100 Kč na období tří let

1. rok: připočítáme 5 % ze 100 Kč = 105 Kč

2. rok: připočítáme 5 % ze 105 Kč = 110,25 Kč

3. rok: připočítáme 5 % z 110,25 Kč = 115,7625 Kč

Oproti jednoduchému úročení se tedy jedná pouze o 76,25 haléřů více.

Odvození základního vztahu pro složené úročení lze provést pomocí základního vztahu jednoduchého polhůtního úročení ve tvaru

 (3.7.1)

kde budoucí hodnota kapitálu je označena *FV,* současná hodnota kapitálu symbolem *PV,* úroková sazba za dané úrokové období *r* apočet úrokových období úročení kapitálu písmenem *t*.

Označíme-li výši kapitálu v roce *t* symbolem pak platí

1. rok

2. rok

3. rok

*n*-tý rok

Tedy se jedná o geometrickou posloupnost s 1. členem a koeficientem .

Obecně tedy lze vyjádřit hodnotu budoucího kapitálu po *n* letech složeného úrokování následovně

 (3.7.2)

přičemž proměnné *r* a *t* musí být vyjádřeny v totožných jednotkách. Obvykle bývá touto jednotkou jeden rok a úročení probíhá vždy na konci roku.

Jako v případě jednoduchého úročení i zde je možno základní rovnici při stejném označení přítomných veličin přepsat do různých podob a odvodit následující formule:

1. výpočet současné hodnoty kapitálu:

 (3.7.3)

1. výpočet úrokové sazby:

 (3.7.4)

1. výpočet počtu úrokových období:

 (3.7.5)

Protože *t* nebude mít hodnotu celého kladného čísla, rozložíme je tak aby, platilo

Zbytek doby splatnosti *l* upřesníme dle vztahu

 (3.7.6)

V praxi dochází také často ke kombinování jednoduchého a složeného úročení v případech, kdy jsou úroky připisovány po určitou dobu k počátečnímu vkladu a s ním úročeny, tedy zde se jedná o složené úročení, ale na konci je nutné vypočítat úrok za dobu kratší než je úrokovací období, zde se jedná o jednoduché úročení.

Nechť kde *t* je počet úrokových období celkem, *n* označuje celou část počtu úrokových období a *n* necelou část počtu úrokových období. Pak lze odvodit podobným postupem jako v předcházejícím případě, že platí

 (3.7.7)

V případě, že se mění úroková sazba během úrokovacího období, lze uvedený vztah rozložit na jednotlivá úroková období. Obdobným způsobem pak lze uvažovat měnící se úrokovou sazbu v rámci složeného a v rámci jednoduchého úročení.

Jestliže se připisují úroky *m*-krát do roka a doba *t* není celé číslo, tedy opět , pak platí

 (3.7.8)

Pokud sestrojíme grafy závislostí hodnoty budoucího kapitálu na probíhajícím čase pro jednoduché a složené úročení pro stejnou počáteční hodnotu kapitálu *PV*, pak zjistíme, že grafem hodnot při jednoduchém úročení je přímka a grafem hodnot pro složené úročení je exponenciální křivka. Tyto dva grafy se protínají v hodnotě pro rok , do této hodnoty jsou hodnoty grafu lineární funkce nad hodnotami grafu exponenciální funkce a poté se situace mění a hodnoty při složeném úročení začínají výrazně převyšovat hodnoty získané při jednoduchém úročení. Platí tedy, že v rámci jednoho úrokovacího období je výhodnější pro klienta jednoduché úrokovací období a pro více než jedno úrokovací období je pro klienta výhodnější složené úročení.

Důležitým nástrojem pro porovnávání různých úrokových sazeb s různou frekvencí připisování úroků za stejné období je *efektivní úroková míra*. Efektivní úroková míra udává míru zhodnocení vložených peněžních prostředků většinou v období jednoho roku a je definována následovně:

 (3.7.9)

kde je hodnota efektivní úrokové míry, *r* je hodnota úrokové sazby za úrokové období a *p*

je počet úrokových období za rok.

Na závěr se zastavíme u pojmu *spojité úročení*, které se používá v případech, kdy připisování úroku probíhá neustále – spojitě jako například při oceňování cenných papírů nebo při práci s kurzy akcií. Spojité úročení je pak dáno následujícím předpisem:

 (3.7.10)

kde *t* je počet let a *r* označuje roční úrokovou sazbu.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ŠOBA, Oldřich a Martin ŠIRŮČEK. 2017. *Finanční matematika v praxi*. 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing. ISBN 978-80-9264-9 ePub. (str. 49 – 69)

**Doporučená literatura**

RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P., 2013, *Finanční matematika pro každého*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-4831-3. (str. 47 – 71)

**Kontrolní otázky**

1. Odvoďte vztah pro složené úrokování a vysvětlete jeho princip.
2. Vysvětlete pojem smíšené úročení.
3. Co je to spojité úročení a kde se používá?
4. Objasněte pojem efektivní úroková míra.
5. Jsou z hlediska dlužníka následující varianty stejné? (předpokládejte, že dluh bude splacen až po 1 roce) a) připisování úroků ve výši 8 % 1x ročně, nebo b) připsání úroků 2 % 4x za rok (nominální úroková míra je tedy 8 %)
6. Která z uvedených variant přinese vyšší zhodnocení vložených prostředků při složeném úročení? Buď vklad úročený pololetně úrokovou sazbou 2 % p. a. nebo vklad úročený měsíčně úrokovou sazbou 2 % p. a.
7. Jaký lze očekávat kurz akcie za 120 měsíců, pokud jeho dlouhodobá průměrná roční změna činí přibližně 5 %? Kurz akcie je v současnosti 1 000 Kč.
8. Na pětiletý termínovaný vklad jste vložili 50 000 Kč. Jakou částku obdržíte při splatnosti vkladu, je-li vklad úročen 3 % p. a.? Úroky budou připisovány měsíčně a podléhají 15 % srážkové dani.
9. Jaká původní částka se za 5 let a 2 měsíce zúročila na 250 000 Kč. Uvažujte úrokovou sazbu s 5 % p. a. se spojitým úročením.
10. Za kolik let se zúročí vklad 20 000 Kč na 27 850 Kč? Účet je úročen 8 % p. a. s pololetním připisováním úroků, které podléhají dani 15 %.

**Zajímavosti z dané problematiky**

O složeném úročení viz

<https://www.rozumnyinvestor.cz/slozene-uroceni/>

<https://rozbiteprasatko.cz/slozene-uroceni/>

**Odkaz na semináře**

 4.7 Složené úročení

## Nominální a reálná úroková sazba

**Klíčová slova**

Nominální a reálná úroková sazba, míra inflace, efektivní úroková sazba, úroková intenzita, Fischerova rovnice.

**Cíle kapitoly**

V této kapitole se přiblíží studentům podrobněji pojmy nominální a reálné úrokové sazby. Prostřednictvím několika vztahů se vysvětlují postupy při výpočtu efektivní úrokové sazby
a intenzity.

**Výstupy z učení**

* 2.2.4 Stanoví efektivní a reálnou úrokovou sazbu.

**Abstrakt**

V kapitole 3.2 jsme se zmínili pojmy nominální a reálné úrokové sazby. Tato kapitola se bude věnovat této problematice podrobněji.

* + 1. ***Reálná a nominální úroková sazba***

Dříve jsme již objasnili význam pojmu *nominální úroková sazba*. Připomeneme zde zatím známá fakta:

Nominální úroková sazba je sazba, která nebere v úvahu vliv *inflace* – vyjadřující snížení kupní síly peněz v dané ekonomice. Inflace ovlivňuje výši kapitálu a především znehodnocuje úroky.

Reálná úroková sazba ovšem s vlivem inflace kalkuluje. Vztah mezi nominální úrokovou sazbou *Rn* a reálnou úrokovou sazbou *Rr* lze vyjádřit pomocí následujícího vztahu:

, (3.8.1)

kde představuje míru inflace.

Vysvětleme rozdíl těchto dvou pojmů na jednoduchém reálném příkladu:

Střadatel, který vloží 1 000 Kč na účet na jeden rok, může dosáhnout nominální úrokové sazby 2,5 % a za rok tak získat 1 025 Kč. Pokud však ceny vzrostou o 3 %, bude na nákup stejného zboží nebo služeb, které před rokem stály 1 000 Kč, potřebovat 1 030 Kč. To znamená, že reálná návratnost bude ve skutečnosti -0,5 %. To je tedy reálná úroková sazba a je vypočtena odečtením míry inflace (3 %) od nominální úrokové sazby (2,5 %). Jinými slovy, reálná úroková sazba může být definována jako nominální, která je upravena pro inflační proces.

Označme stejně jako v předcházejících kapitolách původní hodnotu kapitálu *PV,* budoucí hodnota kapitálu *FV,* nominálníúrokovou sazbu v setinách za dané úrokové období *Rn*,reálnouúrokovou sazbu v setinách za dané úrokové období a představuje opět míru inflace. Předpokládejme, že úrokovací období je roční a počáteční kapitál se bude úročit na konci úrokovacího období nominální sazbou a poté se bude míra inflace diskontovat.

Pak platí následující vztah:

 (3.8.2)

Dále reálnou úrokovou sazbu lze vyjádřit jako poměr výše úroku a počátečního kapitálu následovně:

 (3.8.3)

odtud platí

 (3.8.4)

Další úpravou rovnice (3.8.2) obdržíme

 (3.8.5)

a dále

 (3.8.6)

Nakonec odvodíme následující relaci:

 (3.8.7)

Tento vztah je znám pod názvem *Fisherova rovnice*.

Irving Fisher, americký ekonom, vyslovil v roce 1911 hypotézu, která vysvětluje, jakým způsobem si jsou blízké pojmy reálná úroková sazba a nominální úroková sazba viz odkazy v závěru kapitoly.

* + 1. ***Efektivní úroková sazba***

V předcházející kapitole jsme došli k závěru, že při složeném úročení a při stejné roční úrokové sazbě je pro vkladatele výhodnější, když se úroky připisují vícekrát ročně. Připisují-li se úroky na konci každé části roku, bude úrok v závěru celkově vyšší. Jestliže má být dosaženo při obou způsobech připisování úroků stejného výsledku, musí být nominální úroková sazba při ročním úrokovacím období vyšší než při úrokovacím období kratším než jeden rok. Tuto úrokovou roční sazbu pak nazveme *efektivní úrokovou sazbou*, pro kterou platí následující vztah:

 (3.8.8)

kde označuje efektivní úrokovou sazbu a *i* je roční úroková sazba.

* + 1. ***Úroková intenzita***

V kapitole 3.7 jsme se dotkli pojmu spojité úročení. V této části je tomuto termínu věnovaná větší pozornost.

Z hlediska pohledu na dělení časových intervalů úročení odlišujeme dva způsoby a to *diskrétní*, kdy časové intervaly zadáváme odděleně, a dále *spojitý*. Ve druhém případě se jedná o situaci, kdy počet úrokovacích období, kdy se připisují úroky, bude růst do nekonečna a jejich délka se bude zkracovat až k pomyslné nule. Úroková sazba, která se vztahuje k tomuto případu, se nazývá *úroková intenzita.* Pro úrokovou intenzitu platí vztah

 (3.8.9)

kde Konstanta se nazývá *Eulerovou konstantou* a hraje v matematice významnou roli v mnoha jejích oblastech.

Pokud upravíme vztah (3.8.9), dostáváme:

 (3.8.10)

a označíme-li *f* úrokovou intenzitu, pak lze chápat . Konečně lze vyjádřit vztah mezi úrokovou mírou a intenzitou následovně:

 (3.8.11)

a odtud

 (3.8.12)

 Při spojitém úročení pak platí:

 (3.8.13)

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ŠOBA, Oldřich a Martin ŠIRŮČEK. 2017. *Finanční matematika v praxi*. 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing. ISBN 978-80-9264-9 ePub. (str. 11 – 27)

**Doporučená literatura**

RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P., 2013, *Finanční matematika pro každého*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-4831-3. (str. 75 – 82)

**Kontrolní otázky**

1. Vysvětlete pojmy reálné a nominální úrokovací sazby a vztahu mezi nimi.
2. Vysvětlete pojem efektivní úroková sazba.
3. Co je to spojité úročení?
4. Co představuje Fisherova rovnice?
5. Jak lze stanovit efektivní úrokovou sazbu?
6. Na jakou částku vzroste hodnota 1 Kč při 100 % úrokové sazbě při spojitém úročení za jeden rok?
7. Charakterizujte pojem úroková intenzita.
8. Jak lze stanovit hodnotu efektivní úrokové míry?
9. Popište vztah mezi efektivní úrokovou mírou a intenzitou.
10. Jak lze stanovit hodnotu konečného kapitálu při spojitém úročení?

**Zajímavosti z dané problematiky**

O americkém ekonomovi I. Fisherovi viz

<https://cs.ruarrijoseph.com/obschestvo/74997-nominalnaya-i-realnaya-procentnaya-stavka-eto-uroven-realnyh-procentnyh-stavok.html>

O efektivním úroku a Eulerově konstantě viz

<https://www.stavebky.cz/slozeny-urok-euler/>

**Odkaz na semináře**

 4.8 Nominální a reálná úroková sazba

## Úvěr

**Klíčová slova**

Dluh, půjčka, úmor, úrok, hypoteční úvěr.

**Cíle kapitoly**

Záměrem této kapitoly je analýza pojmů jako úvěr, úmor a úrok. Student se seznámí s klasifikací termínu úvěr z různých druhů pohledu. Dále je zde definován pojem umořovacího plánu a konečně vysvětlen princip hypotečního úvěru.

**Výstupy z učení**

* 2.2.4 Stanoví efektivní a reálnou úrokovou sazbu.

**Abstrakt**

Jedním z nejdůležitějších finančních nástrojů je *úvěr*, který zahrnuje pojmy *dluh* a *půjčka*. Úvěr představuje poskytnutí peněžní částky na danou dobu za jistou odměnu, kterou nazýváme úrok. Rozlišujeme mnoho typů úvěru dle různých hledisek. Mezi základní typy úvěrů jednak pro firmy či pro domácnosti patří například spotřebitelské úvěry, kontokorentní úvěry, hypoteční úvěry či investiční úvěry.

Další důležitou nedílnou součástí úvěru je *umořování* neboli *splácení úvěru*, které probíhá dle předem nastaveného plánu, který se nazývá *splátkový kalendář*. Splátkový kalendář pomocí rozpisu na jednotlivé splátky popisuje, jakým způsobem bude dlužník věřiteli splácet čili umořovat úvěr.

Splátka úvěru se dělí na dvě složky

* úmorovou část – úmor,
* úrokovou část – úrok.

*Úmor* znamená postupné splácení zapůjčené částky neboli umořování jistiny, přičemž součet úmoru ve všech splátkách představuje hodnotu zapůjčené částky.

*Úrok* je vypočítán z nesplacené části úvěru a představuje úrok za období od poslední splátky, který je závislý na nesplacené části úvěru v tomto období a úrokové sazbě dané úrokovacím obdobím.

Z hlediska doby splatnosti rozlišujeme úvěry na

* krátkodobé,
* střednědobé,
* dlouhodobé.

*Krátkodobý úvěr* předpokládá dobu splatnosti maximálně jeden rok, *střednědobý úvěr* je úvěr se splatností od jednoho do čtyř let a *dlouhodobý úvěr* je nastaven na dobu splatnosti delší, než jsou čtyři roky.

Co se týče způsobů umořování úvěru, lze popsat následující hlavní směry:

* úvěr je splatný najednou včetně úroků za danou dobu
* úvěr je sjednán na neurčitou dobu a je nutné ho splatit najednou po výpovědi při zachování výpovědní lhůty
* splácení úvěru se provádí od začátku pravidelnými splátkami a zde dále rozlišujeme následující varianty
1. *konstantní anuita* – platby mají stále stejnou výši, část se zahrnuje do úmoru a část na zaplacení úroku,
2. *konstantní úmor* – platby nemají stále stejnou výši, většinou je stálá částka snižující úmor,
3. *rostoucí anuita* – výše plateb obou složek není konstantní, většinou se zvyšuje s dobou platnosti často ve tvaru aritmetické či geometrické řady.

Při poskytnutí úvěru sestavují věřitelé pro dlužníky harmonogram splácení úvěru v podobě tzv. *umořovacích plánů*, které mají následující význam:

* slouží k výpočtu a přehledu o výši jednotlivých plateb během splácení úvěru,
* pomáhají zjišťovat stav dosud nesplaceného úvěru z pohledu výpočtu úrokové sazby,
* slouží k odlišení úmoru a úroku za účelem správného postupu při zaúčtování.

Umořovací plány dále dělíme dle těchto kritérií:

* způsobem určení na *dekurzivní* a *anticipativní*,
* dle období splátek na stejná či odlišná od úrokového období.

V následující kapitole se budeme věnovat detailněji tématu, jak se sestavuje umořovací plán při stejných anuitách i v odlišných polhůtních splátkách.

Speciálním typem úvěru je *hypoteční úvěr.* Jedná se úvěr na pořízení nemovitosti krytý touto nemovitostí jako zástavou. Věřitel, tedy většinou banka, získá na užívanou nemovitost tzv. *zástavní právo*, prostřednictvím něhož je oprávněn v mimosoudní dražbě tuto nemovitost prodat. Prodejem dlouhodobých dluhopisů, které se nazývají *hypoteční zástavní listy,* pak banky získávají finanční prostředky na hypoteční úvěry. Hypoteční zástavní listy jsou kryty příslušnou zastavenou nemovitostí.

Státní bytová politika se pak může v rámci hypoték uplatňovat tak, že

* výnosy z hypotéčních zástavních listů jsou osvobozeny od daně,
* stát poskytuje dlužníkům úrokové dotace,
* dlužník může do jisté míry snižovat daňová základ o úroky, které splácí v hypotečních splátkách.

Závěrem je vhodné zmínit vztah, pomocí něhož lze stanovit některé veličiny, které se vážou k pojmu hypoteční úvěr. Jedná se především o následující relaci:

 (3.9.1)

kde *m* je počet výplatních období v jednom roce, *n* je počet roků, *j* je hodnota nominální úrokové míry, která se bude úročit *m* krát ročně. Symbolem budeme značit koncovou hodnotu jednotkové splátky, která je určena následovně:

 (3.9.2)

Pomocí uvedeného vztahu lze určit například výši měsíční splátky, vstupní či konečný kapitál atd.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ŠOBA, Oldřich a Martin ŠIRŮČEK. 2017. *Finanční matematika v praxi*. 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing. ISBN 978-80-9264-9 ePub. (str. 70 – 93)

**Doporučená literatura**

RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P., 2013, *Finanční matematika pro každého*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-4831-3. (str. 138 – 146)

**Kontrolní otázky**

1. Vysvětlete pojem úvěr.
2. Popište, které základní složky tvoří úvěr.
3. Popište rozdělení úvěrů z hlediska doby splatnosti.
4. Charakterizujte způsoby umořování úvěru.
5. Proveďte kategorizaci umořovacích plánů.
6. Popište, co je hypoteční úvěr.
7. Jakým způsobem lze stanovit výši měsíčních splátek daného hypotečního úvěru?

**Zajímavosti z dané problematiky**

O hypotékách viz

<https://www.financni-navigator.cz/hypoteky/>

**Odkaz na semináře**

4.9 Úvěr

## Umořovací schéma

**Klíčová slova**

Anuita, umořovací plán, umořování se stejnými a nestejnými splátkami.

**Cíle kapitoly**

Kapitola seznamuje studenty s pojmy anuita, umořování dluhu stejnými a nestejnými splátkami a sestavování umořovacího schématu dluhu.

**Výstupy z učení**

* 2.2.5 Vypočítá současnou a budoucí hodnotu anuity, sestaví umořovací schéma dluhu.

**Abstrakt**

Splácení úvěru dlužníkem věřiteli dle předem dojednaného plánu – *umořovacího plánu* se nazývá *umořování dluhu.*

Dle poznámek v předchozí kapitole se předpokládá, že dluh je umořován vždy na konci pravidelných období. Každá splátka se skládá ze dvou - úmoru a úroku a splátky rozlišujeme na nestejné splátky a stejné splátky, přičemž poslední splátka může mít odlišnou hodnotu.

Umořovací plán je nezbytnou součástí dohody mezi dlužníkem a věřitelem a většinou se skládá z následujících položek:

* výše splátky
* výše úmoru dluhu
* výše úroku z dluhu
* stav dluhu po odečtení úmoru
* realizace přepočtů při různých změnách (záleží na individuální dohodě)
* výpočet daňových odvodů
	+ 1. ***Umořování dluhu stejnými splátkami***

Stejné splátky se označují pojmem *anuitní splátky* a tento typ splácení úvěru je nazýván *anuitním splácením*. Tento způsob splácení je realizován hlavně v případě hypotečních
a spotřebitelských úvěrů a jeho typickým rysem je to, že v průběhu splácení úvěru dochází v každé anuitě k nárůstu úmorové části při současném poklesu její úrokové části.

Výše anuity lze určit z následujícího vztahu:

 (3.10.1)

kde

. (3.10.2)

*D* představuje výši poskytnutého úvěru, je diskontní faktor a *r* je úroková míra za dané úrokové období. Konečně *n* vyjadřuje počet úrokových období splácení úvěru.

Pro případ, že by otázka při zadaném problému zněla: *Kolik let se bude splácet za daných podmínek úvěr?,* vyjádříme ze vztahu (3.10.1) veličinu *n.*

Platí:

Ukažme si využití vztahu (3.10.1) na reálném příkladu:

**Příklad**

Určete měsíční splátku v případě hypotečního úvěru ve výši 1 000 000 Kč, který má být splacen za 15 let při úrokové sazbě 4,50 p. a.

**Řešení:**

V prvé řadě si je třeba uvědomit, že úrokové období je v tomto případě měsíční. Počet úrokových období je 15 let, tedy 180 měsíců. Veličina *r* je určena hodnotou 4,50 p. a., tedy v přepočtu činí 0,375 % p. m., což je 0,00375. Nyní využijeme vztahů (3.10.1) a (3.10.2), tedy platí

Kč.

Měsíční splátka daného hypotečního úvěru tedy bude představovat částku ve výši

7 649,93 Kč.

Při uzavírání smlouvy je obvykle také stanovena doba, po kterou je úvěr úročen konstantní neboli *fixní úrokovou sazbou.* Tato doba se nazývá *fixací* a může představovat různé roční intervaly od jednoho roku až například do třiceti let v závislosti na volbě banky. Čím je délka fixace delší období, tím se zvyšuje úroková sazba. A proto je banka nucena odhadovat budoucí vývoj úrokových sazeb v ekonomice, aby nastavení fixačního období pro ni bylo výhodné. Klient banky by se tak mohl v průběhu splácení úvěru za nevýhodných podmínek přesunout k jiné bance.

Sestavování umořovacího plánu je založeno na následujícím principu. Zvolme pro jednoduchost příklad umořovacího plánu, který bude realizován prostřednictvím čtyř čtvrtletních splátek. Na začátku v období nula se jedná o poskytnutí úvěru. Další položky od 1. až e 4. představují čtyři dílčí splátky. Na konci vyúčtovacího období se musí suma všech úmorů shodovat s výší poskytnutého úvěru a suma splátek musí být totožná se součtem sumy úmorů a úroků. Samozřejmě po úhradě poslední splátky je nesplacená část dluhu nulová.

Umořovací schéma je dáno následujícím postupem, který pro přehlednost představíme pomocí tabulky:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Pořadí splátky | Výše splátky | Úrok | Úmor | Nesplacená část dluhu |
| 0 | - | - | - |  |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|   |  |  |  |  |
|  |   |  |  |  |
| Součet |  | *D* |  | x |

Tabulka 3.10.1 Umořovací schéma.

Zdroj: <https://is.mendelu.cz/eknihovna/opory/zobraz_cast.pl?cast=4359>

Konkrétní příklad sestavování umořovacího plánu lze nalézt v Semináři 4.10.

* + 1. ***Umořování dluhu nestejnými splátkami***

V tomto případě je umořovací plán určen na základě předem stanoveného schématu pro úmor dluhu v jednotlivých splátkách. Tento druh splácení bývá obvykle realizován v případě podnikatelských investičních úvěrů a nazývá se *kapitálové splácení*. Charakteristickým rysem tohoto typu splácení je to, že je předem známa úmorová část každé splátky – *splátka jistiny*. Tato část se může dle předem stanovených podmínek měnit, tedy růst či klesat nebo být konstantní. Pak lze jednoduše určit i nesplacenou část dluhu po úhradě každé splátky
a úrokovou část následující splátky. Sestavení umořovacího plánu je proto jednoduché. Konkrétní příklad je součástí obsahu Semináře 4.10.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ŠOBA, Oldřich a Martin ŠIRŮČEK. 2017. *Finanční matematika v praxi*. 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing. ISBN 978-80-9264-9 ePub. (str. 77 – 93)

**Doporučená literatura**

RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P., 2013, *Finanční matematika pro každého*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-4831-3. (str. 138 – 164)

**Kontrolní otázky**

1. Charakterizujte proces umořovacího plánu.
2. Co je to anuita a jak lze určit její výši?
3. Co je to fixní úroková sazba?
4. Jakým způsobem lze stanovit počet let, během kterých se dluh splatí?
5. Jak probíhá proces umořování dluhu stejnými splátkami?
6. Popište proces umořování dluhu nestejnými splátkami.

**Zajímavosti z dané problematiky**

Umořovací schéma příklady viz

<https://docplayer.cz/1059028-Financni-matematika-uvery.html>

**Odkaz na semináře**

4.10 Umořovací schéma

## Jednorozměrná analýza rizik

**Klíčová slova**

Riziko, analýza citlivosti, expertní rozhodování, matice hodnocení rizik, rozhodovací strom, Brainstorming.

**Cíle kapitoly**

Cílem této kapitoly je vysvětlení pojmu rizika a stručný popis procesu analýzy rizik. V kapitole lze dále nalézt návod, jak lze stanovit vznik rizika a jeho pravděpodobnou výši.

**Výstupy z učení**

* 2.2.6 Provádí analýzu citlivosti.

**Abstrakt**

***3.11.1. Riziko***

Riziko a s ním související pojem nejistota patřícími mezi základní kategorie jak technických, tak i společenských věd. Jedna z mnoha možných definic rizika říká, že riziko je pravděpodobná hodnota ztráty vzniklá nositeli rizika tím, že dochází k realizaci scénáře nebezpečí. Tyto ztráty bývají obvykle vyjádřeny v měnových jednotkách.

*Kvalitativní analýza rizika* se skládá z určení zdrojů rizik, ocenění závažnosti zdrojů rizik, sestavení, popisu a vytvoření reálných scénářů až po finální nečíselný odhad rizika.

*Kvantitativní analýza rizika* je aplikace postupů numerického vyčíslení pravděpodobnosti výskytu a následků potenciální nežádoucí události založený na inženýrském odhadu, vyhodnocení a matematických metodách.

Riziko lze rozlišit z mnoha různých druhů pohledů například na podnikatelské, čisté, systematické či nesystematické, vnitřní a vnější, primární a sekundární, makroekonomické
a mikroekonomické nebo ovlivnitelné či neovlivnitelné.

Dále je možné rizika klasifikovat dle věcné náplně například na výrobní, ekonomické, technicko - technologické, tržní, politické legislativní nebo environmentální.

Všechny problémy mají určitou míru rizika. Proto byly definovány čtyři hlavní stupně vzniku rizika: nízké, střední, vysoké a extrémní.

Rizika je také možné členit dle výše pravděpodobnosti jejího vzniku. Z tohoto důvodu byla vytvořena klasifikace pěti kategorií A, B, C, D a E. Kategorie E - to je určitý druh rizika, které vzniká extrémně vzácně, jedná se o nejméně pravděpodobný jev. Skupina D se týká typů situací, které se pravděpodobně neobjeví. To znamená, že vše, co je teoreticky možné, je zde zahrnuto, ale v praxi je výskyt extrémně vzácný. Další kategorie C zahrnuje rizika, která pravděpodobně vzniknou na základě toho, že k tomu dochází s určitou pravidelností, kterou lze zhruba odhadnout. Předposlední skupina je B začleňuje situace, které se vyskytují častěji, než nevyskytují. Konečně poslední kategorie A popisuje rizika, která nastanou s téměř 100% pravděpodobností.

Základem měření rizika je určení jeho číselných charakteristik, které vyžaduje poměrně hluboké znalosti z oblasti pravděpodobnosti, statistiky a numerické matematiky. Číselné míry rizika mohou představovat

* pravděpodobnost nedosažení nebo překročení určité hodnoty kritéria,
* statistické charakteristiky variability kritéria jsou spojené s termíny rozptyl, směrodatnou odchylkou a variačním koeficientem,
* hodnoty kritéria, které budou překročeny, nebo jich nebude dosaženo se zvolenou pravděpodobností.

Cílem identifikace rizik je popsat kompletní seznam rizikových faktorů, které se na vzniku
a průběhu podílejí, dále určit významnost rizik a to pomocí *analýzy citlivosti* nebo *expertního hodnocení.*

Analýza citlivosti slouží ke stanovení toho, jak určité změny dat například prodejní ceny výrobků, úrokových sazeb, objemu produkce či ceny základních surovin ovlivňují sledované kritérium. Základní formou analýzy citlivosti je jednorozměrná či jednofaktorová analýza, kdy se hledají dopady izolovaných změn jednotlivých rizikových faktorů na předem dané kritérium. Změny hodnot pak mohou představovat odchylky od plánovaných hodnot či optimistických nebo pesimistických hodnot. Rizikové faktory pak podle vlivu na změny rozlišujeme na významné nebo málo důležité.

Expertní hodnocení vychází ze zkušeností expertů pro danou oblast. Jejím výstupem je pak tabulka neboli tzv. *matice hodnocení rizik.*

*Krizovou matici* navrhl Klaus Winterling. Matice je jednou z analytických technik užívaných při [řízení rizik](https://managementmania.com/cs/rizeni-rizik) a v [krizovém řízení](https://managementmania.com/cs/krizove-rizeni). Matice umožňuje kategorizaci rizik podle dvou parametrů:

* *pravděpodobnost vzniku rizika v daném čase* - jak reálné a pravděpodobné je, že riziko skutečně nastane - matice definuje tři úrovně pravděpodobnosti - nízkou, střední a vysokou,
* *Účinky rizika na organizaci -* jaké by byly dopady rizika na [organizaci](https://managementmania.com/cs/organizace), pokud [riziko](https://managementmania.com/cs/rizika) nastane - matice definuje tři úrovně účinku - negativní, ohrožující a zničující.



Obr. 3.11.1. Znázornění krizové matice.

Zdroj: <https://managementmania.com/cs/winterlingova-krizova-matice>

Čím více se riziko posouvá po diagonále doprava nahoru, tím větší pozornost je třeba mu věnovat  v rámci řízení rizik a krizového řízení.

Jednou z nejpoužívanějších metod pro analyzování rozhodovacích situací je *Brainstorming.*

Tato metoda je účinnější pro menší týmy a je obzvláště užitečná v počátečních fázích rozhodování. Metoda samotná není vhodná k identifikaci optimálních řešení problémů, ale spíše k jeho lepší identifikaci jeho důležitých aspektů. Řešení pak musí být dosaženo použitím jiných analytických metod. Průběh brainstormingového sezení vždy řídí jedna předem určená osoba, která zúčastněné osoby uvede do problému, stanoví centrální téma a dále zapisuje všechny názory, nápady a myšlenky. Složení týmu pro brainstorming by mělo být dostatečně pestré tak, aby tým odborně pokrýval, pokud možno, celou oblast řešeného problému. Všichni v místnosti mají udělena stejná práva kromě leadera, který zapisuje nápady. Úkolem leadera je také celý průběh diskuse moderovat, čímž se zabrání chaosu.

Proces rozhodovací analýzy může být podporován dalším důležitým nástrojem tzv. *rozhodovacím stromem,* tedy diagramem nebo také orientovaným grafem složeným z uzlů
a hran. Každý uzel má svoji funkci a každá hrana, která spojuje jednotlivé uzly, je ohodnocena číselným údajem, který vyjadřuje následek jednotlivých rozhodnutí v daném období. V praxi se tento diagram používá zejména při optimalizacích procesu, řešení dopravních problémů nebo při hledání směru vývoje podniku. Můžeme odlišit dva typy rozhodování: *deterministický* určený pro rozhodování v situacích za jistoty a *stochastický*, který se naopak využívá pro rozhodování za nejistoty.

Deterministické stromy jsou tvořeny pouze deterministickými a listovými uzly. Stochastické stromy pak obsahují jeden nebo více stochastických uzlů. Platí přitom, že stochastický strom obvykle obsahuje také deterministické uzly. Deterministické uzly značíme kosočtverci nebo se používají čtverce. Stochastické uzly v rozhodovacích stromech označujeme kružnicí. Ze stochastického uzlu vycházejí obvykle dvě nebo více hran reprezentujících možný následek volby. Každá z těchto hran musí být ohodnocena pravděpodobností to, že daný následek nastane. Součet pravděpodobností hran vycházejících ze stochastického uzlu musí být

roven 1.

V semináři 4.11 je uveden popis, jak vytvářet jednoduchý rozhodovací strom.

Přehledným nástrojem může být také rozhodovací tabulka. Tabulka obsahuje sloupce a řádky, řádkům odpovídají otázky a alternativy a ve sloupcích zapisujeme odpovědi na vybrané dotazy, pokud odpovědi známe. V praktické části kapitoly 4.11 je zařazena ukázka popisované tabulky.

***3.11.2 Měření rizika***

Při formulování prognózy vzniku rizika lze využít základů pravděpodobnosti a statistiky. Stanovení pravděpodobnosti vzniku rizika pak popisuje následující jednoduchý vztah:

 (3.11.1)

kde označuje pravděpodobnost vzniku rizika, *m* udává počet příznivých výsledků sledovaného jevu, *v* pak představuje počet všech možných výsledků.

K měření absolutní výše rizika a určení proměnlivosti lze využít *rozptylu*:

 (3.11.2)

kde je hledaný rozptyl znázorňující jednotlivé změny, jsou data pro *i*-té pozorování, je průměrná hodnota zkoumané veličiny sledovaného období, *n* označuje počet sledovaných veličin a udává pravděpodobnosti vzniku jednotlivých stavů pro *i*-té pozorování.

Druhá odmocnina rozptylu, tedy pak určuje směrodatnou odchylku. Dosahuje-li rozptyl
a směrodatná odchylka vyšších hodnot, pak je aktivita spojená s vyšším rizikem.

Koeficient variace *KV* měří výši rizika a platí, že čím je jeho hodnota větší, tím je větší také riziko:

 (3.11.3)

K dalším důležitým informacím se řadí výpočet očekávané hodnoty peněžních toků, tedy příjmů i výdajů. Průměrná hodnota je určena váženým aritmetickým průměrem všech možných případů následovně

 (3.11.4)

Symbolem zde označujeme průměrnou očekávanou hodnotu peněžních toků, udává jednotlivé peněžní příjmy, je pravděpodobnost, že může nastat jednotlivá událost, *n* je počet možností a *j* označuje pořadí jednotlivých variant.

Konečně lze uvést vztah pro výpočet hodnoty rizika ve tvaru

 (3.11.5)

přičemž představuje hodnotu rizika, je pravděpodobnost vzniku rizika a *D* je hodnota dopadu při vzniku rizika.

Analýzy citlivosti je možné provádět prakticky s pomocí jakéhokoliv nástroje například

tabulkového procesoru MS Excel, R, MathLab, SciLab a řadu dalších.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ARLT, J. a M. ARLTOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (str. 13 – 22)

HNILICA, J., Fotr, J., 2009, *Aplikovaná analýza rizika ve finančním managementu a investičním rozhodování*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-2560-4. (str. 12 – 53)

**Kontrolní otázky**

1. Specifikujte a vysvětlete pojem riziko.
2. Proveďte kategorizaci rizik z různých úhlů pohledu.
3. Co lze vyčíst z krizové matice?
4. K čemu slouží rozhodovací strom?
5. Jak lze stanovit pravděpodobnost vzniku rizika?
6. Jakým způsobem lze měřit absolutní výši rizika?
7. Jak ovlivňuje výše směrodatné odchylky riziko?
8. K čemu slouží rozhodovací strom či rozhodovací tabulka?
9. Co představuje proces Brainstorming?

**Zajímavosti z dané problematiky**

Modelování rozhodovacích procesů viz

<https://docplayer.cz/14356538-Modelovani-rozhodovacich-procesu.html>

Směrnice o hodnocení a řízení rizik viz

<http://www.bozpkestazeni.cz/e-shop/vzor-smernice-o-hodnoceni-a-rizeni-rizik/>

**Odkaz na semináře**

4.11 Jednorozměrná analýza rizik

## Vícerozměrná analýza rizik

**Klíčová slova**

Precedenční, shluková, korespondenční a diskriminační analýza.

**Cíle kapitoly**

Tato kapitola přináší stručný pohled na možnosti, které nabízí vícerozměrná analýza. Student se seznámí s postupy praktikovanými při precedenční, shlukové, korespondenční
a diskriminační analýze.

**Výstupy z učení**

* 2.2.6 Provádí analýzu citlivosti.

**Abstrakt**

Svět kolem nás vnímáme jako třírozměrný prostor, ale vybraný objekt můžeme popsat pomocí mnoha charakteristik jako například výšky, hmotnosti, barvy atd. Abychom získaná data mohli využít ke korektnímu popisu daného objektu či jevu, budeme muset zohlednit všechna data
a vazby a k tomuto procesu slouží *vícerozměrná analýza*. Vícerozměrné analýzy představují velmi užitečný nástroj pro uchopení, zjednodušení a vizualizaci složitých souborů dat. Na druhou stranu mohou v případě nesprávného použití vést k zavádějícím výsledkům.

Ačkoliv klasická statistika zná řadu způsobů popisu jednotlivých měřených nebo pozorovaných parametrů, je pro nás v případě hodnocení velkého množství parametrů velmi

obtížné si tyto výstupy složit v mozku do jednolitého obrazu vedoucího k pochopení podstaty.

Právě vícerozměrná analýza dat je nástrojem sloužícím k usnadnění tohoto procesu a její přínos lze shrnout následovně:

* nalezení smysluplných pohledů na data popsaná pomocí velkého množství parametrů,
* nalezení a popsání skrytých vazeb mezi jednotlivými parametry,
* jednoduchá vizualizace dat, kdy v jediném grafickém znázornění jsou komplexní informace pro velký počet proměnných,
* umožnění a zjednodušení interpretace dat na základě jejich zjednodušením pomocí vícerozměrné analýzy.

Ačkoliv je v případě vícerozměrných analýz používána celá řada matematických postupů, mají všechny tyto analýzy společný rys a to hledají, které naměřené parametry nebo objekty spolu nějakým způsobem souvisí a které je tedy možné jako podobné sloučit a tak snížit objem
a složitost naměřených dat. Nemá smysl ale provádět tuto analýzu v případě, kdy by mezi naměřenými daty neexistovala žádná vazba.

Základem každé vícerozměrné analýzy je tabulka obsahující v řádcích jednotlivé měřené objekty a ve sloupcích parametry získané v souvislosti s danými objekty. V případě více než tří parametrů nejsme schopni sestrojit odpovídající graf, a proto se využívá vícerozměrné analýzy, která příslušná data nejdříve zjednoduší a poté lze již graf znázornit.

Hlavním principem vícerozměrné analýzy je zjednodušení naměřených dat díky analýze jejich vzájemných vazeb, a tudíž důležitým krokem v další analýze je vytvoření měřítka vazby

* naměřených parametrů,
* naměřených objektů,
* skupin objektů vztahujících se k parametrům.

Nejčastějším způsobem pro získání měřítka vazby parametrů bývá používána kovariance
a korelace a tím sestavíme tzv. *asociační matici parametrů*.

 Další možností je provedení vyhodnocení vazby mezi skupinami objektů a parametry, což vede k sestavení tzv. *kontingenční tabulky*. Tato tabulka je pak vyšetřována na základě *korespondenční analýzy*.

K nejrozšířenějším typům vícerozměrných analýz se řadí

* preferenční analýza,
* shluková analýza
* korespondenční analýza,
* diskriminační analýza.

*Preferenční analýza* je speciální technika sloužící pro určení, které proměnné charakterizující výrobky nebo služby nejvíce ovlivňují volbu produktu a které kombinace kategorií těchto proměnných jsou spotřebiteli nejvíce preferovány.

Základem je analýza rozptylu, která je aplikována na proměnné vyjadřující preference spotřebitelů. Preference mohou být vyjádřeny například pořadím (nejmenší číslo znamená největší preferenci) nebo bodovým ohodnocením (nejmenší číslo znamená nejmenší preferenci). Dále některé programové systémy umožňují zadávat čísla přiřazená jednotlivým kombinacím v pořadí od nejvíce po nejméně preferovanou kombinaci. Kromě marketingových průzkumů může být tato metoda použita i v řadě jiných oblastí výzkumu.

*Shluková analýza* je vícerozměrná [statistická](http://referaty-seminarky.cz/statistika/) metoda, která se používá ke [klasifikaci](http://referaty-seminarky.cz/klasifikace/) objektů. Slouží k třídění jednotek do skupin (shluků) tak, aby si jednotky náležící do stejné skupiny byly podobnější než objekty ze skupin různých. Shlukovou analýzu je možné provádět jak na [množině](http://referaty-seminarky.cz/mnozina/) objektů, z nichž každý musí být popsán prostřednictvím stejného souboru [znaků](http://referaty-seminarky.cz/znak/), které má smysl v dané množině sledovat, tak na množině znaků, které jsou charakterizovány prostřednictvím určitého souboru objektů, nositelů těchto znaků.

Základní dělení shlukových metod podle cíle, ke kterému směřují, je na *hierarchické*a *nehierarchické*:

* Hierarchické shlukování je systém [podmnožin](http://referaty-seminarky.cz/podmnozina/), kde [průnikem](http://referaty-seminarky.cz/prunik/) dvou shluků je buď prázdná množina, nebo jeden z nich. Pokud nastane alespoň jednou druhý případ, je systém hierarchický.
* Nehierarchické shlukování je takový systém, kde je průnik shluků prázdný, jedná se o [disjunktní](http://referaty-seminarky.cz/disjunkce/) množiny.

Shluková analýza tedy vychází z podobnosti, resp. vzdálenosti objektů. Její kvantitativní vyjádření je jedním ze základních problémů shlukové analýzy a lze popsat mnoho způsobů sestrojení tohoto ukazatele.

Existují různé způsoby, jak shlukovat objekty na základě jejich vzdálenosti či podobnosti. Mezi základní metody patří metoda nejbližšího souseda, metoda nejvzdálenějšího souseda, centroidní metoda nebo Wardova metoda viz odkazy na literaturu.

Jsou-li k dispozici dvě skupiny údajů, a to údaje o respondentech a údaje o produktech, pak můžeme sledovat, které typy respondentů preferují určité typy výrobků. Metoda umožňující toto zkoumání se nazývá *korespondenční analýza*. Nejjednodušším případem je ten, kdy datový soubor zahrnuje pouze dvě proměnné, z nichž jedna obsahuje kategorie respondentů dle určitého hlediska a druhá určité kategorie sledovaného výrobku či služby. Pro tento případ je určena jednoduchá korespondenční analýza. Složitější případy pak řeší vícenásobná korespondenční analýza. Korespondenční analýza tedy slouží ke shlukování kategorií nominálních proměnných. Jejím výsledkem je grafická reprezentace vztahů mezi proměnnými.

Cílem *diskriminační analýzy* je odhalit model, který shromáždí jednotlivé případy do skupin. Diskriminační analýza tedy vytváří na základě znalosti příslušností již existujících tříd klasifikační pravidlo, podle kterého lze následně zařadit jednotky s neznámou skupinovou příslušností.

Modely vícerozměrných řad lze teda chápat jako zobecnění modelů jednorozměrných časových řad. Existuje celá řada modelů např. VAR, VMA, VARMA či SEMMA. Pomocí těchto modelů lze definovat různé typy vztahů v časových řadách viz Povinná literatura.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ARLT, J. a M. ARLTOVÁ, 2009. Ekonomické časové řady. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (str. 163 – 273)

**Doporučená literatura**

HNILICA, J., Fotr, J., 2009, *Aplikovaná analýza rizika ve finančním managementu a investičním rozhodování*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-2560-4. (str. 47 – 71)

**Kontrolní otázky**

1. Popište, k čemu slouží vícerozměrná analýza.
2. Charakterizujte její hlavní principy.
3. Vysvětlete podstatu preferenční analýzy.
4. Na jakém principu pracuje shluková analýza?
5. Co je podstatou korespondenční analýzy?
6. Popište, na čem je postavena diskriminační analýza.
7. Které matematické postupy se používají při vícerozměrné analýze?

**Zajímavosti z dané problematiky**

O shlukové analýze

[https://worldofplants.net/2017/09/21/shlukova-analyza/](https://worldofplants.net/2017/09/21/shlukova-analyza/%20)

**Odkaz na semináře**

4.12 Vícerozměrná analýza rizik

## Tvorba scénářů

**Klíčová slova**

Kvalitativní a kvantitativní scénář, simulace Monte Carlo, What-if analýza*.*

**Cíle kapitoly**

V kapitole se student seznámí se všemi atributy spojenými s tvorbou scénářů. Dále kapitola nabízí popis základní simulační metody Monte Carlo.

**Výstupy z učení**

* 2.2.6 Provádí analýzu citlivosti.

**Abstrakt**

K základním postupům, pomocí nichž lze stanovit velikost rizika podniku, patří *tvorba scénářů* a *simulace Monte Carlo*. Dalším důležitým pomocníkem, který může naznačit, o jak velké riziko se jedná, je tzv. *What-if analýza.* Metoda What–if je založena na poradách, při kterých kvalifikovaný pracovní tým (dobře seznámený se zkoumaným procesem) prověřuje formou dotazů a odpovědí neočekávané události, které se mohou v procesu vyskytnout. Cílem porady je identifikovat nebezpečné stavy a provozní situace. Dále pracovní tým odhaduje možné následky a navrhuje opatření vedoucí ke snížení rizika.

Citlivostní analýza What-if řeší obsáhlé tabulky křížových výpočtů v rámci jednorozměrných nebo dvourozměrných proměnných. Pomocí této funkce lze dopočítávat obsáhlé tabulky na základě několika kombinací vstupních hodnot. Tyto hodnoty bývají umístěny vždy v prvním sloupci, případně řádku tabulky, nebo jako konstanty mimo tabulku.

V Excelu se pro tuto funkci citlivostní analýzy používá výraz *Tabulka dat*. Podle toho, zda měníme jednu nebo dvě proměnné software rozlišuje *Tabulku dat s jednou proměnnou*
a *Tabulku dat se dvěma proměnnými*. Více informací lze nalézt v průvodcích programu Excel.

* + 1. ***Scénáře***

Scénáře se využívají k nastínění budoucího vývoje. Lze konstatovat, že se jedná o možné příběhy, jejichž hlavním úkolem je ukázat spojení jednotlivých potencionálních událostí a jejich vzájemné propojení. Nemodelují jednotlivé situace, ale kombinaci možných variant. Scénář je nástroj pro analýzu možností, které slouží hlavně pro dlouhodobý rozvoj podniku.

Scénáře odlišujeme na *kvalitativní a kvantitativní*.

Kvantitativní analýza je náročnější na zdroje a její realizace trvá mnohem déle než kvalitativní analýza rizik. Je tomu tak proto, že hodnotu aktiva je nutné vyjádřit v penězích stejně jako možnou škodu v případě realizace konkrétní hrozby. Vyjádření škody ve finančních jednotkách však umožňuje jednodušší rozhodování ve fázi zvládání rizik, kdy vybíráme vhodná opatření. Lze rozlišit několik přístupů

* analýza historických dat a statistik,
* analýza závislostí,
* síťové analýzy,
* simulace a modelování,
* marketingové průzkumy a analýzy trhu.

Kvalitativní scénář používá slov k popisu rozsahu možných následků a pravděpodobností, že se tyto následky přihodí. Užité škály mohou být přizpůsobeny nebo upraveny tak, aby vyhovovaly okolnostem, a různá rizika mohou být popsána různým způsobem.

Kvalitativní analýza se používá:

* jako úvodní přehled vedoucí k identifikaci rizik, která vyžadují podrobnější zkoumání,
* tam, kde tento druh analýzy postačuje k rozhodování,
* tam, kde číselné údaje nebo zdroje nejsou dostatečné k provedení kvantitativní analýzy.

Kvalitativní analýza rizik je tedy založena na expertním odhadu jednotlivých aktiv, hrozeb
a zranitelností a pro jejich vyjádření používá slovního nebo číselného hodnocení. Umožňuje tak poměrně snadno a rychle identifikovat ta největší rizika. Nevýhodou oproti kvantitativní analýze rizik, kde je způsob výpočtu víceméně daný a nezpochybnitelný, tak v případě kvalitativní analýzy rizik neexistuje pouze jediná možnost, jak se dobrat výsledku například kvůli možnosti zvolit si v podstatě jakoukoliv stupnici pro stanovení hodnoty aktiv, hrozeb
a zranitelností.

Analytici upřednostňující kvantitativní přístup oproti kvalitativnímu často argumentují tím, že kvalitativní hodnocení dopadů je prováděno s vysokou mírou subjektivity, kdy výsledná hodnota závisí z velké části na osobním názoru hodnotitele. Pro stanovení kvantitativní hodnot se využívají výše uvedené metodiky a nástroje, které však mohou v sobě zahrnovat také jistou míru subjektivity. Odborníci na finance mají k dispozici celou řadu nástrojů na výpočty odhadovaných hodnot, nicméně žádná předpověď rizik i matematicky podložená, nemůže být stoprocentní. Kvantitativní přístupy využívající finanční škály jsou velmi vhodné, pokud je po provedené analýze nutné najít zdroje na pokrytí zjištěných rizik.

* + 1. ***Simulace Monte Carlo***

Metoda Monte Carlo patří mezi simulační metody, které využívají statistickou simulaci posloupnosti náhodných čísel. Smyslem simulace Monte Carlo je modelovat na základě přijatelných vstupů možné výstupy s použitím pravděpodobnostního počtu statistiky.

Pravděpodobně první systematické využití této metody je datováno až do roku 1930, kdy italský fyzik *Enrico Fermi* tento přístup využíval ke generování náhodných čísel k určení vlastností neutronu. Za své výsledky byl tento vědec oceněn Nobelovou cenou. Metoda Monte Carlo pak sehrála klíčovou roli při simulacích, kterými se odhadovala štěpná reakce při vývoji atomové bomby za 2. Světové války.

Princip simulace Monte Carlo lze snadno pochopit na následujícím příkladu:

Osoba hází klasickou kostkou o šesti stranách. Začátečník, který hraje kostky poprvé, neví, jak moc je pravděpodobné, že hodí například šestku v součtu dvou kostek (3+3, 5+1 atd.). Jaká je pak šance na hození dvou trojek současně? Budeme-li házet kostkou mnohokrát a budeme-li zaznamenávat úspěšné pokusy, budeme schopni tuto pravděpodobnost odhadnout. V ideálním případě bychom na začátku mohli zjistit tento výsledek efektivně a rychle, což je přesně to, co Monte Carlo simulace svým uživatelům dokáže nabídnout.

Ceny aktiv nebo budoucí hodnoty portfolií nejsou závislé na házení kostek, ale někdy se vývoj cen aktiv podobá takzvané *náhodné procházce*. Problém při dívání se pouze do historie spočívá v tom, že reprezentuje ve skutečnosti pouze jeden hod kostkou nebo pravděpodobný výsledek, který může či nemusí být nutně použitelný také v budoucnosti. Monte Carlo simulace zvažuje širokou škálu možností a pomáhá nám tak snížit podstupovanou nejistotu. Navíc je tato simulace velmi flexibilní, protože umožňuje měnit rizikové předpoklady u všech parametrů
a tím pomáhá modelovat řadu možných výstupů. Lze tak porovnávat různé budoucí výsledky
a přizpůsobovat model různým aktivům a portfoliím během průzkumu.

Monte Carlo simulace má četné aplikace ve financích a jiných oborech, většinou se však používá při řízení portfolia a osobním finančním plánování.

Pomocí metody lze řešit velké množství scholastických i deterministických problémů. Využívá se zejména v oblastech, kde je zapotřebí vygenerovat velké množství náhodných pokusů. V oblasti matematiky jsou známé její aplikace například při stanovení hodnoty Ludolfova čísla nebo při výpočtu jednoduchých určitých integrálů, pro řešení dvojných integrálů a řešení systémů lineárních rovnic.

Během simulace Monte Carlo dochází k vytváření úlohy, která má podobnou strukturu jako reálný problém. Řešení má pravděpodobnostní charakter a jde o odhad. Pokud se bude zvětšovat počet pokusů, dojde k zvětšování přenosností řešení, ale musíme počítat s tím, že se prodlouží doba výpočtu.

Na začátku každé simulace je zapotřebí stanovit si požadované cíle a pochopit roli všech prvků v systému. Pokud nebude určen cíl, pak nebude zřejmé, co přesně se očekává od simulace. Postup simulace lze rozdělit do těchto kroků:

1. Výběr kritéria hodnocení, které bude předmětem simulace

2. Stanovení závislosti zvoleného kritéria na ovlivňujících veličinách

3. Určení klíčových faktorů rizika

4. Stanovení rozdělení pravděpodobnosti klíčových faktorů rizika

5. Vlastní proces simulace s využitím počítačového programu.

Na odkazech v závěru kapitoly lze nalézt příklady, jak se popsaná metoda realizuje v praxi. V semináři 4.13 pak lze nalézt jednoduchou ukázku toho, jak se metoda Monte Carlo využije pro výpočet obsahu plochy daného útvaru.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

HNILICA, J., Fotr, J., 2009, *Aplikovaná analýza rizika ve finančním managementu a investičním rozhodování*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-2560-4. (str. 57 – 71)

**Kontrolní otázky**

1. K čemu slouží v ekonomii scénáře?
2. Popište rozdíl mezi kvantitativní a kvalitativní analýzou.
3. Vysvětlete základní principy simulace Monte Carlo.

**Zajímavosti z dané problematiky**

Jak používat Excel pro analýzu dat pomocí metody What-if viz

<http://cs.tipsandtricks.tech/jak-pouzivat-analyzu-what-if-aplikace-excel>

O metodě Monte Carlo viz

<http://www.simulace.info/index.php/Monte_Carlo_method_application_in_simulations/cs>

Jak využívat metodu Monte Carlo k předpovědím viz

<https://www.kurzovesazeni.com/jak-pouzit-simulacni-model-monte-carlo-k-predpovedi-vysledku/>

**Odkaz na semináře**

4.13 Tvorba scénářů

# Příprava na semináře

## Potřebné základy matematiky

**Klíčová slova**

Posloupnost, řada a její konvergence, průměr, funkce.

**Cíle kapitoly**

Tato část seznamuje s pojmy aritmetické a geometrické posloupnosti, konvergencí řady, kvalifikuje základní typy průměrů a připomíná elementární funkce, které jsou ve finanční matematice pro práci důležité.

**Výstupy z učení**

* 2.2.1 Využívá posloupnosti při řešení matematických problémů.

**Příklad, uvedení vzorového úkolu**

**Příklad 1:**

V aritmetické posloupnosti jsou dány následující údaje: , .

Určete a

**Řešení:**

Ze vztahu pro pro -tý člen posloupnosti plyne

 8. (4.1.1)

Odtud vyjádříme

 a tedy . (4.1.2)

Dále využijeme formule pro součet  členů posloupnosti, tedy

416 =  (88 – 8n + 80). (4.1.3)

Po úpravě obdržíme kvadratickou rovnici ve tvaru

 (4.1.4)

s kořeny a , tedy zadání vyhovují dvě posloupnosti zadané následovně: a .

**Příklad 2:**

Aritmetická posloupnost je zadána následujícími údaji: , Kolik členů této posloupnosti je nutné sečíst, aby celkový součet byl větší než 250?

**Řešení:**

 (4.1.5)

 (4.1.6)

 (4.1.7)

Řešením této nerovnice jsou všechna nebo . Reálnou možností je pouze volba prvního řešení a je třeba tedy sečíst alespoň 11 členů zadané posloupnosti.

**Příklad 3:**

Určete člen geometrické posloupnosti jestliže jsou dány hodnoty a 

**Řešení:**

 Pro výpočet využijeme vzorce

, (4.1.8)

tedy

**Příklad 4:**

Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí

a

**Řešení:**

Podmínky zadané v úloze tvoří soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé. Tato soustava má dvě řešení a) , b)

1. Platí . (4.1.9)

Vydělením druhé rovnice první rovnicí získáme hodnotu a pak

1. Stejným postupem získáme druhé řešení s hodnotami a pak

**Příklad 5:**

Určete, zda je řada konvergentní.

**Řešení:**

1. Pomocí podílového kritéria:

 (4.1.10)

, a proto daná řada konverguje.

1. Pomocí odmocninového kritéria:

 (4.1.11)

, a proto daná řada konverguje.

**Příklad 6:**

Určete, zda je řada konvergentní. Použijte srovnávací kritérium.

**Řešení:**

Platí:

 (4.1.2)

a odtud ze známého faktu, že je řada konvergentní, plyne závěr, že i daná řada je konvergentní.

**Zadání samostatné práce (úkolu)**

1. Určete součet prvních 20 členů aritmetické posloupnosti, v níž je

 a

1. Mezi čísla 4 a 37 vložte několik čísel tak, aby spolu s danými čísly tvořila po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.
2. Určete součet prvních čtyř členů geometrické posloupnosti jestliže platí
3. Určete prvních pět členů geometrické posloupnosti jestliže platí

a

1. Určete všechny členy geometrické posloupnosti , pro něž platí a
2. Určete .

8. Určete .

9. Určete .

10. Roční příjmy patnácti rodin (v tisíci eurech) činí

 60, 80, 90, 96, 120, 150, 200, 360, 480, 520, 1060, 1200, 1450, 2500, 7200.
 Určete aritmetický, harmonický a geometrický průměr těchto příjmů rodin.

 11. Načrtněte grafy následujících funkcí:

,

.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P., 2013. *Finanční matematika pro každého*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-4831-3. (str. 9 – 23).

**Doporučená literatura**

DOŠLÁ, Z., a LIŠKA, P., 2014. *Matematika pro nematematické obory: s aplikacemi v přírodních a technických vědách*. 1. vydání. Praha: Grada Publishing, 304 stran. Expert.

ISBN 978-80-247-5322-5. (str. 31 – 51, 143 – 153)

## Základní pojmy ve finanční matematice

**Klíčová slova**

Časová hodnota peněz, úrok, úroková sazba, úrokové období, úročení.

**Cíle kapitoly**

Cílem této kapitoly je podat souhrn základních termínů užívaných ve finanční matematice
a vysvětlit jejich význam. Uvedené pojmy jsou důležité pro pochopení obsahu navazujících kapitol.

**Výstupy z učení**

* 2.2.3 Využívá různé druhy úročení s různou frekvencí.

**Příklad, uvedení vzorového úkolu**

**Příklad 1.**

Na účet se čtvrtletním úrokovým obdobím a s úrokovou sazbou 4 % p. a. bylo uloženo 5 000 Kč, sazba daně z úrokových příjmů je 15 %. Jaký úrok připíše banka na účet za 3 měsíce?

**Řešení:**

Využijeme vztahu (3.2.4) , tedy nejdříve je nutné určit hodnotu *r*. Protože

p. a., pak p. q., tudíž vliv zdanění bude mít hodnotu

 %. (4.2.1)

Pak tedy

 (4.2.2)

Banka připíše na účet úrok ve výši 425 Kč.

**Příklad 2.**

Určete odčítací metodou počet dní úrokovací doby od 8. 3. 2020 do 6. 5. 2020.

**Řešení:**

Odečteme měsíce pozpátku a násobíme 30, tedy

Odečteme pozpátku dny, tedy dostaneme

Získané výsledky sečteme a tím obdržíme celkovou dobu dní za vymezený úsek, celkem se jedná o 126 dní.

**Příklad 3.**

Má vyšší hodnotu 1 000 Kč získaných dnes nebo 1 100 Kč obdržených za rok při roční úrokové sazbě 15 %?

**Řešení:**

Hodnota částky 1 100 Kč bude při daném zúročení vypočítána následovně:

 (4.2.3)

Hodnota částky 1 000 Kč bude určena pak takto:

 (4.2.4)

Pokud uložíme na účet nyní částku 1 000 Kč, bude zúročení vyšší.

**Příklad 4.**

Určete čistou úrokovou sazbu v případě, kdy byla uzavřena smlouva o ročním termínovaném vkladu s úrokovou sazbou 4 % p. a. a na tento účet bylo vloženo 10 000 Kč.

**Řešení:**

Využijeme vztahu (3.2.2), tedy odkud dostáváme:

 (4.2.5)

Čistá úroková sazba činí 3,40 % p. a. a banka z úroků ve výši 400 Kč po zdanění 15 % připsala úrok ve výši 340 Kč.

**Příklad 5.**

Klient dostane od banky na 9 měsíců úvěr ve výši 500 000 Kč s roční úrokovou mírou 12,6 % a s podmínkou, že na svém účtu musí udržovat alespoň 15 % vypůjčené částky. Jaká je pak skutečná úroková míra takového úvěru?

**Řešení:**

Opět využijeme vztahu

 Kč. (4.2.6)

 Pak je nutné vzít v úvahu 15 % zdanění, tedy platí:

 Kč. (4.2.7)

Dále dosadíme získané hodnoty do vztahu

 (4.2.8)

Skutečná úroková míra daného úvěru je 14,8 %.

**Zadání samostatné práce (úkolu)**

1. Určete odčítací metodou počet dní úrokovací doby od 1. 1. 2020 do 1. 5. 2020
2. Určete odčítací metodou počet dní úrokovací doby od 12. 2. 2020 do 9. 8. 2020
3. Zjistěte odčítací metodou počet dní úrokovací doby od 23. 5. 2020 do 8. 11. 2020
4. Na účet se čtvrtletním úrokovým obdobím a s úrokovou sazbou 4 % p. a. bylo uloženo 1 000 Kč, sazba daně z úrokových příjmů je 10 %. Jaký úrok připíše banka na účet za 3 měsíce?
5. Má vyšší hodnotu 20 000 Kč získaných dnes nebo 22 000 Kč obdržených za rok při roční úrokové sazbě 15 %?
6. Vyjádřete v rocích celé měsíce únor a březen dle jednotlivých standardů v případech, kdy se jedná o přestupný rok.
7. Určete hrubou úrokovou sazbu v případě, kdy byla uzavřena smlouva o ročním termínovaném vkladu s úrokovou sazbou 4 % p. a. a na tento účet bylo vloženo 10 000 Kč.
8. Klient uložil do banky vklad ve výši 150 000 Kč dne 15. 3. a vybral ho i s úroky dne 6. 11. téhož roku. Kolik si klient vybral, jestliže vklad zaručoval roční úrokovou míru 3 %? Užijte standard ACT/360.
9. Nakupující se rozhoduje, zda koupit zboží buď nyní za 1 650 000 Kč nebo příští rok za 1 800 000 Kč. Co je pro něj výhodnější, jestliže hotovost 1 650 000 Kč ba na jeden rok investoval při roční čisté úrokové míře 4 %?
10. Vypočtěte úrok při úrokové sazbě 12 % v období od 21. 1. do 7. 11., jestliže jste vložili částku 94 117 Kč.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ŠOBA, Oldřich a Martin ŠIRŮČEK. 2017. *Finanční matematika v praxi*. 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing. ISBN 978-80-9264-9 ePub. (str. 11 – 27)

**Doporučená literatura**

RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P., 2013, *Finanční matematika pro každého*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-4831-3. (str. 24 – 27)

## Časové řady

**Klíčová slova**

Okamžitá a intervalová časová řada, diference, koeficient růstu.

**Cíle kapitoly**

Záměrem této kapitoly je seznámit studenty se základy problematiky časových řad, s postupy pro určení jejich charakteristik a ukazatelů jejich průběhu.

**Výstupy z učení**

* 2.2.2 Pracuje s časovými řadami, sčítá a analyzuje jejich konvergenci.

**Příklad, uvedení vzorového úkolu**

**Příklad 1***.*

Měsíční výroba cementu v ČR během roku 2011 tvoří časovou řadu 536, 384, 727, 789, 817, 798, 817, 816, 817, 765, 675, 358 (v tis. tun). Pro účely srovnání měsíční produkce cementu sestavte časovou řadu produkcí pro standardní měsíc o délce

a) 30 dnů

b) 365/12 dnů.

**Řešení:**

Pro očištěnou výrobu v lednu platí:

1. pro standardní měsíc o délce 30 dnů:

tun, (4.3.1)

b) pro situaci 365/12 dnů:

tun. (4.3.2)

Pro další měsíce provedeme očištění podobně. Všechny výchozí i očištěné údaje jsou uvedeny následující tabulce:



Tabulka 4.3.1. Očištěné údaje pro výrobu cementu v roce 2011. Zdroj: ARLT, J., M. ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica (str. 20 – 46)

**Příklad 2***.*

Průměrná hrubá měsíční nominální mzda v Ústeckém kraji za roky 2004 - 2008 je uvedena

v následující tabulce.

|  |  |
| --- | --- |
| rok  |  mzda  |
| 2004 | 15 322 |
| 2005 | 16 345 |
| 2006 | 17 113 |
| 2007 | 19 606 |
| 2008 | 20 962 |

Tabulka 4.3.2. Průměrná hrubá měsíční mzda v Ústeckém kraji za roky 2004 – 2008. Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica. (str. 20 – 46)

Určete procentní nárůst (případně pokles) měsíční nominální mzdy. Určete průměrné tempo růstu za jeden rok.

**Řešení:**

Pro procentní nárůst (přesněji koeficient růstu) v roku 2005 platí dle kapitoly 3.3:

 (4.3.3)

Všechny výsledky jsou uvedeny v následující tabulce:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| rok  |  mzda  | koeficient růstu *k* |
| 2004 | 15 322 | --- |
| 2005 | 16 345 | 1,0668 |
| 2006 | 17 113 | 1,0470 |
| 2007 | 19 606 | 1,1457 |
| 2008 | 20 962 | 1,0692 |

Tabulka 4.3.3. Přehled hodnot koeficientů růstu pro roky 2004 – 2008. Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica (str. 20 – 46)

Průměrný koeficient růstu je proto dle (3.3.6) roven

 (4.3.4)

Průměrný nárůst za uvedené roky je 8,2%.

**Příklad 3***.*

Průměrná hrubá měsíční nominální mzda v Ústeckém kraji za roky 2004 - 2008 je v následující tabulce.

|  |  |
| --- | --- |
| rok  |  mzda  |
| 2004 | 15 322 |
| 2005 | 16 345 |
| 2006 | 17 113 |
| 2007 | 19 606 |
| 2008 | 20 962 |

Tabulka 4.3.4. Průměrná hrubá měsíční mzda v Ústeckém kraji za roky 2004 – 2008. Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica. (str. 20 – 46)

Určete nárůst (případně pokles) měsíční nominální mzdy. Určete průměrný přírůstek za jeden rok.

**Řešení:**

Pro přírůstek (přesněji diferenci) v roku 2005 platí dle kapitoly 3.3:

 (4.3.5)

Všechny výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| rok  |  mzda  | diference *d* |
| 2004 | 15 322 | --- |
| 2005 | 16 345 | 1 023 |
| 2006 | 17 113 | 768 |
| 2007 | 19 606 | 2 493 |
| 2008 | 20 962 | 1 356 |

Tabulka 4.3.5. Přehled hodnot diferencí pro roky 2004 – 2008. Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica

(str. 20 – 46)

Průměrný absolutní přírůstek je proto dle kapitoly 3.3 roven následující hodnotě:

 (4.3.6)

**Zadání samostatné práce (úkolu)**

1. Měsíční výroba hraček firmy ABC během roku 2015 představuje časovou řadu 222, 258, 298, 306, 304, 200, 247, 301, 222, 400, 350, 201 v ks. Pro účely srovnání měsíční produkce cementu sestavte časovou řadu produkcí pro standardní měsíc o délce 30 dnů.
2. Měsíční výroba hraček firmy ABC během měsíců 1. – 11. 2015 představuje časovou řadu 222, 258, 298, 306, 304, 200, 247, 301, 222, 400, 350, v ks. Pro účely srovnání měsíční produkce cementu sestavte časovou řadu produkcí pro standardní měsíc o délce 365/11 dnů.
3. Měsíční výroba hraček firmy ABC během měsíců 1. – 11. 2015 představuje časovou řadu 222, 258, 298, 306, 304, 200, 247, 301, 222, 400, 350, v ks. Pro účely srovnání měsíční produkce cementu sestavte časovou řadu produkcí pro standardní měsíc o délce 365/11 dnů.
4. Průměrné hrubé měsíční nominální mzdy ve sledované firmě za roky 2004 - 2008 jsou uvedeny v následující tabulce:

|  |  |
| --- | --- |
| rok  |  mzda  |
| 2004 | 16 222 |
| 2005 | 17 645 |
| 2006 | 18 113 |
| 2007 | 20 804 |
| 2008 | 22 359 |

Tabulka 4.3.6. Průměrné hrubé měsíční mzdy za roky 2004 – 2008. Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica.

(str. 20 – 46)

Určete koeficienty růstu. Pomocí průměrného tempa růstu se pokuste odhadnout mzdu v dalším roku.

1. Průměrná výroba čokolád v jisté firmě za měsíce 1. – 7. roku 2017 činí (v tis. ks) je dána hodnotami v následující tabulce:

|  |  |
| --- | --- |
| Leden | 58 000 |
| Únor | 68 000 |
| Březen | 55 000 |
| Duben | 48 000 |
| Květen | 47 000 |
| Červen | 47 000 |
| Červenec | 45 000 |

Tabulka 4.3.7. Průměrná výroba čokolád za 1 – 7. měsíc. Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica. (str. 20 – 46)

Zjistěte diference a koeficienty růstu u počtu vyrobených kusů. Pomocí průměrného tempa růstu se pokuste odhadnout počet kusů v dalším období.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ARLT, J. a M. ARLTOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (str. 11 – 19)

**Doporučená literatura**

CIPRA, T., 2008. *Finanční ekonometrie*. Praha: Ekopress. ISBN 978-80-86929-43-9.

(str. 227 – 248)

## Trend a sezónní složka

**Klíčová slova**

Trend, sezónní, cyklická a náhodná složka.

**Cíle kapitoly**

Kapitola přináší klasifikaci časových řad a seznamuje se základními složkami dekompozice časové řady. Student se seznámí se základní charakteristikou jednotlivých trendů.

**Výstupy z učení**

* 2.2.2 Pracuje s časovými řadami, sčítá a analyzuje jejich konvergenci.

**Příklad, uvedení vzorového úkolu**

**Příklad 1***.*

Sestavte rovnici trendové funkce ve tvaru přímky pro údaje o tržbách obchodní organizace
a určeme předpověď této tržby pro následující dva měsíce. Hodnoty a potřebné výpočty jsou uvedeny v tabulce.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Měsíc | *t* |   |
| Leden | 1 | 328541 |
| Únor | 2 | 325154 |
| Březen | 3 | 330244 |
| Duben | 4 | 329570 |
| Květen | 5 | 332489 |
| Červen | 6 | 340025 |
| Červenec | 7 | 338962 |
| Srpen | 8 | 342110 |

Tabulka 4.4.1. Přehled o tržbách obchodní organizace. Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica. (str. 20 – 66)

**Řešení:**

K určení parametrů přímky nejdřív rozšíříme tabulku o další dva sloupce, a další dva řádky, součet a průměr:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Měsíc | *t* |  |  |  |
| Leden | 1 | 328541 | 328541 | 1 |
| Únor | 2 | 325154 | 650308 | 4 |
| Březen | 3 | 330244 | 990732 | 9 |
| Duben | 4 | 329570 | 1318280 | 16 |
| Květen | 5 | 332489 | 1662445 | 25 |
| Červen | 6 | 340025 | 2040150 | 36 |
| Červenec | 7 | 338962 | 2372734 | 49 |
| Srpen | 8 | 342110 | 2736880 | 64 |
| Součty | 36 | 2667095 | 12100070 | 204 |
| Průměry | 4,5 | 333386,9 | 1512509 | 25,5 |

Tabulka 4.4.2. Tabulka hodnot pro výpočet koeficientů přímky. Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica.

(str. 20 – 66)

Určíme parametry přímky:

 (4.4.1)

 (4.4.2)

Odhadovaná trendová přímka je proto

. (4.4.3)

Předpověď (extrapolace) pro další dva měsíce odpovídá hodnotám trendové přímky pro hodnoty a

**Příklad 1.**

Jsou dány čtvrtletní údaje sezónně očištěné časové řady spotřeby elektrické energie jisté firmy v letech 2007 – 2011 v kWh. Cílem analýzy je najít model trendu a ověřit jeho vhodnost
v období v letech 2007 – 2009, otestovat autokorelaci nesystematické složky, určit předpovědi na roky 2010 – 2011 a posoudit, zda je vybraný model vhodný na předpovídání.



Tabulka 4.4.3. Souhrn údajů sezónně očištěné časové řady v letech 2007 – 2011. Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica. (str. 20 – 66)

**Řešení:**



Obr. 4.4.1. Graf trendu. Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica. (str. 20 – 66)

Z grafu vidíme, že vývoj spotřeby elektrické energie má kvadratický trend. Období analýzy rozdělíme na dvě části. Na období interpolace (prvních 12 údajů) a období verifikace modelu (posledních 8 údajů).

Při aplikaci kvadratického modelu je zřejmé, že na 5% hladině významnosti nejsou koeficienty přírůstku a zrychlení statisticky významné. Kvadratický trend proto není vhodně zvolený. Pokud odhadneme kvadratický trend na celé časové řadě od I/2007 – IV/2011, dostaneme výsledky uvedené níže. Z tohoto výstupu je zřejmé, že koeficient přírůstku je na rozdíl od koeficientu zrychlení stále na 5 % hladině významnosti statisticky nevýznamný. Upravíme proto kvadratický trend tak, že tento koeficient z modelu vyloučíme a využijeme programu Excel. Dostáváme pak rovnici druhého modelu ve tvaru:

= 663,5 + 0,758 t2, (4.4.4)

kde koeficient zrychlení je statisticky významný. Z reziduí vypočtěme hodnotu reziduálního rozptylu, která má hodnotu 3 201,587. Z této hodnoty lze usuzovat, že sezónně očištěné hodnoty řady spotřeby elektrické energie firmy budou kolísat kolem kvadratického trendu se směrodatnou odchylkou v hodnotě 56,58 [kWh].

**Zadání samostatné práce (úkolu)**

1. Časová řada obsahuje údaje o produkci firmy v měsících březen až říjen roku 2012

(v tis. Kč): 121, 120, 124, 125, 127, 129, 132, 134. Sestavte rovnici trendové přímky
a určete bodovou i 90 % intervalovou předpověď produkce na měsíc listopad a prosinec 2012.

1. Uvažujeme časovou řadu hodnot 8,3; 8,4; 8,9; 8,6; 8,8; 8,8; 8,7; 8,7; 8,6; 8,5; 7,9, udávajících spotřebu určité suroviny (v kg) na jednoho obyvatele České republiky
v letech 2001 - 2011. Vyrovnejte časovou řadu pomocí kvadratického trendu a testujte významnost odhadnutých koeficientů na hladině významnosti 5 %. Znázorněte graficky původní i vyrovnaná data. Odhadněte spotřebu suroviny v roce 2012.
2. Vyberte libovolnou časovou řadu a znázorněte ji graficky. Navrhněte vhodnou aproximaci trendu této řady a použijte vhodný matematický software.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ARLT, J. a M. ARLTOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (str. 11 – 23)

**Doporučená literatura**

CIPRA, T., 2008. *Finanční ekonometrie*. Praha: Ekopress. ISBN 978-80-86929-43-9.

(str. 258 – 274)

## Předpovědi v časových řadách

**Klíčová slova**

Bodová a intervalová předpověď, průběh trendu časové řady, míra kvality předpovědi.

**Cíle kapitoly**

Cílem kapitoly je představit možnosti způsobů předpovědí v časových řadách a seznámit studenty s analýzou trendové a sezónní složky.

**Výstupy z učení**

* 2.2.2 Pracuje s časovými řadami, sčítá a analyzuje jejich konvergenci.

**Příklad, uvedení vzorového úkolu**

**Příklad 1.**

Určete předpověď této tržby pro následující dva měsíce. Hodnoty jsou uvedeny v tabulce.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Měsíc | *t* |  |
| Leden | 1 | 328541 |
| Únor | 2 | 325154 |
| Březen | 3 | 330244 |
| Duben | 4 | 329570 |
| Květen | 5 | 332489 |
| Červen | 6 | 340025 |
| Červenec | 7 | 338962 |
| Srpen | 8 | 342110 |

Tabulka 4.5.1. Souhrn tržeb za měsíce leden – srpen. Zdroj: : ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica. (str. 20 – 66)

**Řešení:**

Odhadovaná trendová přímka je dle předchozí kapitoly Příkladu 1. ve tvaru

 (4.5.1)

Předpověď (extrapolace) pro další dva měsíce odpovídá hodnotám trendové přímky pro hodnoty a , tedy Kč a Kč.

**Příklad 2**.

V tabulce jsou uvedeny sezónně očištěné čtvrtletní údaje o podílu nezaměstnaných 30 – 34 letých na celkové nezaměstnanosti Slovenska v letech 2005 až 2011 v %. Vyberte vhodný model trendu, ověřte jeho vhodnost (analyzujte rezidua) a určete předpovědi do konce roku 2012. Testujte významnost regresních koeficientů na hladině významnosti 5 %.

****

Tabulka 4.5.2. Souhrn sezónně očištěných čtvrtletních údajů o podílu nezaměstnaných ve stáří 30 – 34 let na celkové nezaměstnanosti Slovenska v letech 2005 až 2011 v %. Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica. (str. 20 – 66)

**Řešení:**

Sestrojíme graf časové řady. Z grafu vidíme klesající lineární trend sezónně očištěné časové řady, doporučujeme graf sestavit v prostředí programu Excel.

****

Obr. 4.5.1. Graf časové řady. Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica. (str. 20 – 66)

Z hodnot v Excelu následně zjistíme hodnotu korelačního koeficientu , která ukazuje na vysokou závislost mezi proměnnou a časem. Koeficient determinace určuje 96,7 % celkové variability.

**Zadání samostatné práce (úkolu)**

1. Vytvořte grafický model následující úlohy a výsledky interpretujte. Pokuste se vložit spojnici trendu. K modelu využijte program Excel. Zjistěte další statistické hodnoty.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Rok |  | *t* |  |  |  |  |
| 93 | 1901 | 1 | -6 | 36 | -11406 |  |
| 94 | 2085 | 2 | -5 | 25 | -10425 |  |
| 95 | 2124 | 3 | -4 | 16 | -8496 |  |
| 96 | 2431 | 4 | -3 | 9 | -7293 |  |
| 97 | 2858 | 5 | -2 | 4 | -5716 |  |
| 98 | 3164 | 6 | -1 | 1 | -3164 |  |
| 99 | 3150 | 7 | 0 | 0 | 0 |  |
| 00 | 2963 | 8 | 1 | 1 | 2963 |  |
| 01 | 2746 | 9 | 2 | 4 | 5492 |  |
| 02 | 2986 | 10 | 3 | 9 | 8958 |  |
| 03 | 3103 | 11 | 4 | 16 | 12412 |  |
| 04 | 3287 | 12 | 5 | 25 | 16435 |  |
| 05 | 3488 | 13 | 6 | 36 | 20928 |  |
| Σ | 36286 | - | 0 | 182 | 20688 |  |

Tabulka 4.5.3. Souhrn údajů k časové řadě. Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica. (str. 20 – 66)

1. Uvažujeme údaje o tržbách obchodní organizace  v mil. Kč v letech 1994 – 2010 (v tabulce). Trend v tržbách popište pomocí funkce .

|  |  |
| --- | --- |
| Rok |  |
| 94 | 8,3 |
| 95 | 7,8 |
| 96 | 8,8 |
| 97 | 9,9 |
| 98 | 11,7 |
| 99 | 13,3 |
| 00 | 15,5 |
| 01 | 16,5 |
| 02 | 16,1 |
| 03 | 15,9 |
| 04 | 18,1 |
| 05 | 20,1 |
| 06 | 20,7 |
| 07 | 23,4 |
| 08 | 26,5 |
| 09 | 28,6 |
| 10 | 31,9 |
| Σ | 293,1 |

Tabulka 4.5.4. Údaje o tržbách obchodní organizace  v mil. Kč v letech 1994 – 2010.

Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica. (str. 20 – 66)

**Řešení:**

Potřebné výpočty jsou uvedeny v tabulce níže.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Rok |  |  |   |  |   |   |
| 94 | 8,3 | -8 | 64 | 4096 | -66,4 | 531,2 |
| 95 | 7,8 | -7 | 49 | 2401 | -54,6 | 382,2 |
| 96 | 8,8 | -6 | 36 | 1296 | -52,8 | 316,8 |
| 97 | 9,9 | -5 | 25 | 625 | -49,5 | 247,5 |
| 98 | 11,7 | -4 | 16 | 256 | -46,8 | 187,2 |
| 99 | 13,3 | -3 | 9 | 81 | -39,9 | 119,7 |
| 0 | 15,5 | -2 | 4 | 16 | -31 | 62 |
| 1 | 16,5 | -1 | 1 | 1 | -16,5 | 16,5 |
| 2 | 16,1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 15,9 | 1 | 1 | 1 | 15,9 | 15,9 |
| 4 | 18,1 | 2 | 4 | 16 | 36,2 | 72,4 |
| 5 | 20,1 | 3 | 9 | 81 | 60,3 | 180,9 |
| 6 | 20,7 | 4 | 16 | 256 | 82,8 | 331,2 |
| 7 | 23,4 | 5 | 25 | 625 | 117 | 585 |
| 8 | 26,5 | 6 | 36 | 1296 | 159 | 954 |
| 9 | 28,6 | 7 | 49 | 2401 | 200,2 | 1401,4 |
| 10 | 31,9 | 8 | 64 | 4096 | 255,2 | 2041,6 |
| Σ | 293,1 | 0 | 408 | 17544 | 569,1 | 7445,5 |

Tabulka 4.5.5. Tabulka výpočtů. Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica. (str. 20 – 66)

Zde jsme vhodně přeznačili časovou proměnnou , není to nutné, ale tímto způsobem se sníží součty v posledním řádku. Zbývá určit parametry přímky:

 (4.5.2)

 (4.5.3)

 (4.5.4)

Parabolickou trendovou funkci modelující trend v tržbách dané organizace odhadujeme tedy ve tvaru

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Rok |  |  |  |  |  |
| 94 | 8,3 | -8 | 64 | 4096 | 8,200 |
| 95 | 7,8 | -7 | 49 | 2401 | 8,800 |
| 96 | 8,8 | -6 | 36 | 1296 | 9,506 |
| 97 | 9,9 | -5 | 25 | 625 | 10,318 |
| 98 | 11,7 | -4 | 16 | 256 | 11,236 |
| 99 | 13,3 | -3 | 9 | 81 | 12,260 |
| 00 | 15,5 | -2 | 4 | 16 | 13,390 |
| 01 | 16,5 | -1 | 1 | 1 | 14,626 |
| 02 | 16,1 | 0 | 0 | 0 | 15,968 |
| 03 | 15,9 | 1 | 1 | 1 | 17,416 |
| 04 | 18,1 | 2 | 4 | 16 | 18,970 |
| 05 | 20,1 | 3 | 9 | 81 | 20,630 |
| 06 | 20,7 | 4 | 16 | 256 | 22,396 |
| 07 | 23,4 | 5 | 25 | 625 | 24,268 |
| 08 | 26,5 | 6 | 36 | 1296 | 26,246 |
| 09 | 28,6 | 7 | 49 | 2401 | 28,330 |
| 10 | 31,9 | 8 | 64 | 4096 | 30,520 |
| Σ | 293,1 | 0 | 408 | 17544 | 293,080 |

Tabulka 4.5.6. Tabulka výpočtů. Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica. (str. 20 – 66)

1. Uvažujme časovou řadu výroby elektrické energie (v TWh) v Maďarsku v letech 2000 až 2012. Pokuste se vyrovnat tuto řadu pomocí klouzavého průměru délky 3, pak pomocí klouzavého průměru délky 5.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Rok |  |  | MA(3) | MA(5) |
| 2000 | 1 | 38,6 |  |  |
| 2001 | 2 | 41,6 |  |  |
| 2002 | 3 | 43,1 |  |  |
| 2003 | 4 | 45,2 |  |  |
| 2004 | 5 | 47,2 |  |  |
| 2005 | 6 | 51,4 |  |  |
| 2006 | 7 | 53,5 |  |  |
| 2007 | 8 | 56,0 |  |  |
| 2008 | 9 | 59,3 |  |  |
| 2009 | 10 | 62,7 |  |  |
| 2010 | 11 | 66,5 |  |  |
| 2011 | 12 | 69,1 |  |  |
| 2012 | 13 | 68,1 |  |  |

Tabulka 4.5.7. Údaje k časové řadě výroby elektrické energie (v TWh) v Maďarsku v letech 2000 – 2012. Zdroj: ARLTOVÁ a E. RULÍKOVÁ, 2004. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Oeconomica. (str. 20 – 66)

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ARLT, J. a M. ARLTOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (str. 23 – 43)

**Doporučená literatura**

CIPRA, T., 2008. *Finanční ekonometrie*. Praha: Ekopress. ISBN 978-80-86929-43-9.

(str. 274 – 305)

## Jednoduché úročení

**Klíčová slova**

Předlhůtní úročení, polhůtní úročení, úrok, úroková míra, diskont, skonto, úrokový dělitel.

**Cíle kapitoly**

Cílem kapitoly je připomenout studentům postupy používané při jednoduchém úročení, seznámit je s rozdíly mezi úročením a bankovním diskontem, postupem při výpočtu úroků na běžných účtech a při posuzování výhodnosti skonta.

**Výstupy z učení**

2.2.3 Využívá různé druhy úročení s různou frekvencí.

**Příklad, uvedení vzorového úkolu**

**Příklad 1.**

Jaká částka musí být vložena na účet, aby za 3 měsíce při 4 % roční úrokové sazbě, při čtvrtletním úrokovém období a 15 % srážkové dani z příjmů bylo na tomto účtu 1 000 Kč?

**Řešení:**

Ze zadání úlohy plyne, že *r* = 1 % p. q., doba měsíce, tedy jedno čtvrtletí a vliv zdanění je roven hodnotě p. q. Využijeme vztahu (3.6.3):

 (4.6.1)

Tedy platí

 (4.6.2)

**Příklad 2.**

Na účet s roční úrokovou sazbou 4 % p. a. a pololetním úrokovým obdobím jsme uložili

100 000 Kč. Jakou částku si můžeme vybrat za 2 měsíce, pokud jsou úroky zdaňovány srážkovou sazbou daně z příjmů ve výši 20 %?

**Řešení:**

Úrokové období je pololetní, to znamená, že jak úroková sazba *r*, tak počet úrokových období *t* musí být tomuto formátu přizpůsobeny. Jelikož jsou rovněž úroky zdaňovány srážkovou sazbou daně z příjmů, je nutno aplikovat čistou úrokovou sazbu.

Úrokové období je pololetí, tedy

Vliv zdanění má hodnotu rovnou

 (4.6.3)

a měsíce = 2/6 pololetí = 1/3 pololetí. Pak platí dle (3.6.2):

 (4.6.4)

Za 2 měsíce si můžeme vyzvednout 100 533,33 Kč.

**Příklad 3.**

Firma A dodala firmě B zboží v hodnotě 150 000 Kč. Částka je splatná do 6 týdnů, přičemž při zaplacení do 2 týdnů nabízí prodávající firma možnost skonta ve výši 1 % z prodejní ceny. V případě dřívějšího zaplacení by ovšem musela firma použít své prostředky na spořicím účtu, který je úročen úrokovou sazbou 3 % p. a. s ročním připisováním úroků. Je pro kupující firmu za daných podmínek výhodné využít skonta a zaplatit zboží do 2 týdnů? Sazba daně z příjmů činí 20 %.

**Řešení:**

Budeme používat metodu srovnání absolutní výše skonta a úroku.

Skonto má hodnotu 0,01150 000 = 1 500 Kč. Jestliže kvůli využití skonta klesnou kupujícímu daně o 1 500 Kč, pak vzroste daňové zatížení o hodnotu 0, 21 500 = 300 Kč. Výše skonta pak bude 1 500 Kč – 300 Kč = 1 200 Kč.

Pokud bude chtít kupující využít skonta, pak bude muset částku o výši

148 000 Kč = 150 000 Kč – 1 500 Kč (4.6.5)

uhradit 4 týdny před splatností. Hodnota úroku za roční úrokové období při zdanění pak činí 0,03 (1 – 0.2) = 0,024 p. a. Proto výše úroku je rovna hodnotě

148 500 0,02428/360 = 277,20 Kč. (4.6.6)

Pro kupujícího je tedy výhodné využít skonta, protože skonto bude mít hodnotu 1 200 Kč

a ušlé úroky budou činit 277,20 Kč.

**Zadání samostatné práce (úkolu)**

1. Klient si vypůjčil z banky 65 000 Kč na 10 % úrok p. a. při jednoduchém úročení na 9 měsíců a 21 dní. Kolik musí vrátit po uplynutí stanovené doby? [70 252 Kč]
2. Jak se zúročí vklad 1 000 Kč na 20 % úrok p. a., je-li úrokován jednoduchým způsobem po dobu 5 let? [2 000 Kč]
3. Jakou částku si můžeme půjčit se splatností 4 měsíce, máme-li možnost po této době použít na splacení úvěru a úroků částku 10 000 Kč? Úroková sazba činí 0,09 % p. a.

[9 710 Kč]

1. Jakou částku budete vracet bance, jestliže jste si od ní půjčili 55 000 Kč na 6 měsíců při roční úrokové míře 9 %?
2. Za kolik dnů vzroste vklad 1 500 Kč na 1 600 Kč při roční úrokové míře 8 % a použitém standardu 1 rok = 360 dní.
3. Uložili jste na vkladní knížku u peněžního ústavu 2 000 Kč. Úroková sazba je 4 %

 p. a. a úroky z vkladu jsou daněny srážkovou daní ve výši 15 %. Jakou částku si můžete vybrat za 3 měsíce?

1. Odběratel nezaplatil dodavateli fakturu znějící na 150 000 Kč splatnou 3. 3. 2011. Podle smlouvy má odběratel právo účtovat penále ve výši 0,05 % z fakturované částky za každý den prodlení. Jak velké bude penále 11. 11. 2011?
2. Banka nabízí dvě varianty placení úroku u ročního úvěru:

a) Sazba 10 % p. a. splatných při splatnosti úvěru,

b) Sazba 9,5 % p. a. splatných k datu poskytnutí úvěru.

Která varianta je pro dlužníka výhodnější?

1. Jakou diskontní sazbu má směnka znějící na částku 230 000 Kč, je-li aktuální cena 200 000 Kč a zbývá-li jí 10 měsíců do splatnosti?
2. Kolik dnů zbývalo do splatnosti směnky znějící na částku 500 000 Kč, jestliže za ni banka vyplatila částku 490 000 Kč při diskontní sazbě 10 % p. a.?

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ŠOBA, Oldřich a Martin ŠIRŮČEK. 2017*. Finanční matematika v praxi*. 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing. ISBN 978-80-9264-9 ePub. (str. 29 – 49)

**Doporučená literatura**

RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P., 2013, *Finanční matematika pro každého*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-4831-3. (str. 27 – 40)

## Složené úročení

**Klíčová slova**

Složené úročení, spojité úročení, kombinované úročení, efektivní míra.

**Cíle kapitoly**

Cílem kapitoly je analyzovat pojem složené úročení, seznámit studenty s výpočty při úročení pro různé délky úrokových období a porovnáváním finančních produktů s různou délkou úrokových období.

**Výstupy z učení**

2.2.3 Využívá různé druhy úročení s různou frekvencí.

**Příklad, uvedení vzorového úkolu**

**Příklad 1.**

Na účet jsme uložili částku v hodnotě 12 000 Kč. Jaká bude výše kapitálu za 3 roky při složeném úročení, jestliže úroková sazba bude 5 % p. a.?

**Řešení:**

Vycházíme ze vztahu (3.7.2) a tedy platí Pokud dosadíme zadaná data, obdržíme

Kč. (4.7.1)

Konečná hodnota kapitálu bude Kč.

**Příklad 2.**

Na jakou hodnotu vzroste vklad v hodnotě 15 000 Kč na 3 roky a 5 měsíců při úrokové sazbě 5 % p. a.?

**Řešení:**

3 roky a 5 měsíců roku. Využijeme vztahu (3.7.7), kde platí

, tedy (4.7.2)

 Kč. (4.7.3)

Vklad vzroste za daných podmínek na hodnotu 17 726,13 Kč.

**Příklad 3.**

Jak dlouho byl uložen kapitál 2 300 000 Kč, jestliže vzrostl při 9 % úroku p. a. při složeném úrokování na hodnotu 4 995 354 Kč?

**Řešení:**

Budeme vycházet ze vztahu (3.7.5), odkud je . Tedy platí:

 (4.7.4)

Abychom upřesnili výsledný čas, využijeme relace (3.7.6), kde

Pak platí:

 (4.7.5)

Pokud výsledek vynásobíme 360, dostáváme 359,99928 dní. Celková doba úročení byla 8 let
a 360 dní, tedy 9 let.

**Příklad 4.**

Kolik musíme uložit, abychom za 5 let při úrokové sazbě 5 % p. a. získali kapitál v hodnotě 100 000 Kč při složeném úročení?

**Řešení:**

Využijeme vztahu (3.7.3), kde tedy platí

Kč. (4.7.6)

Za daných podmínek je třeba uložit 78 352,62 Kč.

**Zadání samostatné práce (úkolu)**

1. Na tříletý termínovaný vklad jste vložili 12 000 Kč. Jakou částku obdržíte při splatnosti vkladu, je-li vklad úročen 12,5 % p. a.? [17 085,6 Kč]
2. Jak se zúročí úvěr ve výši 1 milionu korun, byl-li úrokován složeným způsobem při úrokové sazbě 0,05 % p. a. po dobu 2 let, 6 měsíců a 27 dní? [1 134 141,8 Kč]
3. Jak dlouho byl uložen kapitál 15 000 Kč, vzrostl-li na hodnotu 15 0000 Kč při složeném úrokování a při úrokové sazbě 4 % p. a.? [8 let, 6 měsíců a 27 dní]
4. Určete dobu splatnosti kapitálu 25 000 Kč při úrokové sazbě 0,04 % p. a. a při zúročeném kapitálu v hodnotě 29 246,5 Kč. [4 roky]
5. Kolik je třeba složit v bance, abychom měli za 5 let, 3 měsíce a 24 dní částku ve výši 1 milionu Kč při úrokové míře 4 % p. a. [811 754 Kč]
6. Jak velký úrok bude klientovi započítán k dluhu 250 000 Kč, který je splatný za 5 let, 4 měsíce a 21 dní při složeném úrokování a sazbě 12 = p. s.? [239 725 Kč]
7. Jaký lze očekávat kurz akcie za 120 měsíců, pokud jeho dlouhodobá průměrná roční změna činí 5 %? Kurz akcie je 10 000 Kč. [16 487 Kč]
8. Při jaké roční úrokové sazbě s měsíčním připisováním úroků se za 20 let zpětinásobí vložený vklad? [8,08 p. a.]
9. Na jakou částku se za 1,5 roku zúročil vklad 15 000 Kč. Uvažujte úrokovou sazbu s

5 % p. a. se spojitým úročením. [16 168, 26 Kč]

1. Najděte efektivní úrokovou sazbu, která odpovídá úrokové sazbě 0,1 p. s., 0,1 p. q.

 a 0,1 p. m. [10,25 %, 10, 38 %, 10,42 %]

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ŠOBA, Oldřich a Martin ŠIRŮČEK. 2017*. Finanční matematika v praxi*. 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing. ISBN 978-80-9264-9 ePub. (str. 49 – 69)

**Doporučená literatura**

RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P., 2013, *Finanční matematika pro každého*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-4831-3. (str. 47 – 71)

## Nominální a reálná úroková sazba

**Klíčová slova**

Nominální a reálná úroková sazba, míra inflace, efektivní úroková sazba, úroková intenzita, Fischerova rovnice.

**Cíle kapitoly**

V této kapitole se přiblíží studentům podrobněji pojmy nominální a reálné úrokové sazby. Prostřednictvím několika vztahů se vysvětlují postupy při výpočtu efektivní úrokové sazby
a intenzity*.*

**Výstupy z učení**

* 2.2.4 Stanoví efektivní a reálnou úrokovou sazbu.

**Příklad, uvedení vzorového úkolu**

**Příklad 1.**

Jaká je reálná úroková sazba, pokud banka nabízí na jednoleté depozitum roční nominální úrokovou sazbu 8 % a skutečná roční míra inflace je 3 %.

**Řešení:**

Využijeme vztahu (3.8.1), kde a proto platí:

 (4.8.1)

Pokud by klient banky uložil na roční termínový vklad jeden spotřební koš ve výši 1000 Kč, pak by po roce jeho reálná kupní síla vzrostla o 4,85 %. Klient by si koupil více než jeden spotřební koš, tj. 1,049 spotřebního koše.

**Příklad 2.**

Jaká je reálná úroková sazba, pokud banka nabízí na jednoleté depozitum roční nominální úrokovou sazbu 8 % a skutečná roční míra inflace je 10 %.

**Řešení:**

Dle (3.8.1) platí:

 (4.8.2)

Reálná kupní síla klienta by byla po roce nižší. Mohl by si totiž koupit méně než 1 spotřební koš, tj. 0,982 spotřebního koše.

**Příklad 3.**

Jaká je čistá reálná míra zisku, jestliže hrubá nominální míry zisku je 6 %, daň ze zisku je

15 % a míra inflace jsou 2 %?

**Řešení:**

Čistá nominální míra zisku je dána hodnotou

Reálná nominální míra zisku je pak dle vztahu rovna hodnotě

 (4.8.3)

Čistá reálná míra zisku činí při daných podmínkách 3,04 %.

**Příklad 4.**

Nalezněte efektivní úrokovou sazbu, která odpovídá 10 % roční nominální úrokové sazbě, jestliže jsou úroky připisovány pololetně.

**Řešení:**

V zadané úloze má veličina *m* hodnotu rovnou 4. Tedy dle (3.8.11) platí

 (4.8.4)

Hledaná hodnota efektivní úrokové sazby činí 10,38 = p. a.

**Příklad 5.**

Jaká je úroková intenzita při efektivní úrokové sazbě 10 %?

**Řešení:**

Dle (3.8.12) platí

 (4.8.5)

Úroková intenzita bude mít hodnotu 9,53 %.

**Zadání samostatné práce (úkolu)**

1. Rozhodli jste se zúročit částku 1 milionu Kč. Uložili jste tuto sumu na účet, který je úročen 3 % p. a. při ročním připisování úroků. Kolik Kč budete mít po dvouletém zúročení?
2. Kolik si lze zakoupit kusů výrobku, jehož jednotková cena je 5 000 Kč?
3. Kolik byste si mohli koupit kusů výrobku po dvou letech, pokud by inflace první i druhý rok byla stejná ve výši 2,5 %?
4. Kolik kusů výrobku byste si mohli koupit po dvou letech, pokud byste museli platit daně z úroků a nebyla by inflace?
5. Kolik kusů výrobku byste si mohli koupit po dvou letech, pokud byste museli platit daně z úroků a inflace by dosahovala hodnoty 2,5 % ročně?
6. Kolik kusů výrobku byste si mohli koupit po dvou letech, pokud byste museli platit daně z úroků a inflace by dosahovala hodnoty v prvním roce 2,5 % a ve druhém roce by byla 3 % ročně?
7. Nalezněte efektivní úrokovou sazbu, která odpovídá 10 % roční nominální úrokové sazbě, jestliže jsou úroky připisovány měsíčně.
8. Na kolik vzroste kapitál 10 000 Kč za 5 let při spojitém úročení a intenzitě 5 %?
9. Jaká je současná hodnota kapitálu, který za 3 roka vzroste na 25 000 Kč při 12,5 % úrokové intenzitě?
10. Nalezněte efektivní úrokovou sazbu, která odpovídá 10 % roční nominální úrokové sazbě, jestliže jsou úroky připisovány čtvrtletně.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ŠOBA, Oldřich a Martin ŠIRŮČEK. 2017. *Finanční matematika v praxi*. 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing. ISBN 978-80-9264-9 ePub. (str. 11 – 27)

**Doporučená literatura**

RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P., 2013, *Finanční matematika pro každého*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-4831-3. (str. 75 – 82)

## Úvěr

**Klíčová slova**

Dluh, půjčka, úmor, úrok, hypoteční úvěr.

**Cíle kapitoly**

Záměrem této kapitoly je analýza pojmů jako úvěr, úmor a úrok. Student se seznámí s klasifikací termínu úvěr z různých druhů pohledu. Dále je zde definován pojem umořovacího plánu a konečně vysvětlen princip hypotečního úvěru.

**Výstupy z učení**

* 2.2.4 Stanoví efektivní a reálnou úrokovou sazbu.

**Příklad, uvedení vzorového úkolu**

**Příklad 1.**

Pro názornost uvedeme příklad spotřebitelského úvěru v praxi:

Výše spotřebitelského úvěru činila 500 000 Kč. Poplatek za náklady spojené s uzavřením smlouvy a zpracováním ocenění nemovitosti, která se odečítá od poskytnutého úvěru, představovala částku 25 0000 Kč. Doba splatnosti byla určena na 120 měsíců. Výše měsíční splátky byla spočtena na 6 650 Kč měsíčně s úrokovou sazbou 9 % p. a. RPSN bylo 10,01 % p. a. Celková částka splatná spotřebitelem byla 798 057 Kč a celkem bylo zaplaceno na úrocích 273 057 Kč.

V takto nastavené smlouvě pak splátky vedou k okamžitému umořování jistiny.

**Příklad 2.**

Klient má v plánu zakoupit nemovitost za 1 450 000 Kč. Při uzavření smlouvy zaplatí hotově 450 000 Kč a zbytek má splatit v měsíčních hypotečních splátkách vždy na konci měsíce za dobu 20 let. Kolik činí měsíční splátka, je-li úroková míra určená pro klienta ve výši 5,4 %?

**Řešení:**

Platí

 (4.9.1)

 podle (3.9.1) a (3.9.2), kdy v tomto případě je *j* = 0,054, *m* = 12, *n* = 20 a dále

Kč. (4.9.2)

Měsíční splátka by za daných okolností činila 6 823 Kč.

**Příklad 3.**

Rodiče chtějí zrekonstruovat byt. Odhad na rekonstrukci činí 1 000 000 Kč. Rodiče mají naspořeno 300 000 Kč. Zbývajících 700 000 Kč chtějí získat prostřednictvím hypotečního úvěru. Banka jim úvěr nabídne s roční úrokovou mírou 4,6 %, dobou splatnosti 20 let a měsíční splátkou 4 500 Kč. Jak vysoké náklady budou na úvěr? Poplatky spojené s úvěrem jsou: poplatek za schválení úvěru 0,75 % ze zapůjčené částky, za vedení účtu 150 Kč měsíčně, za odhad tržní budoucí ceny bytu 2 000 Kč a každoročně 2 200 Kč za pojištění bytu.

**Řešení:**

Rodiče počítají s tím, že ve splátkách zaplatí celkem 20 ∙ 12 ∙ 4 500 = 1 080 000 Kč, tedy jsou připraveni splácet s úroky celkem

1 080 000 – 700 000 = 380 000 Kč. (4.9.3)

Banka si účtuje za schválení úvěru 0,75 % ze zapůjčené částky, za vedení účtu 150 Kč měsíčně, za odhad tržní budoucí ceny bytu musí zaplatit 2 000 Kč a každoročně 2 200 Kč za pojištění bytu. Jaké budou skutečné náklady na úvěr:

* Úroky činí 380 000 Kč.
* Poplatek za schválení úvěru je roven hodnotě 6 000 Kč, (700 000 ∙ 0,0075 = 5 250, ale minimální sazba je 6000 Kč).
* Pojištění nemovitosti je určeno částkou 20 ∙ 2 200 = 44 000 Kč.
* Poplatek za vedení účtu je dán hodnotou 20 ∙ 12 ∙ 150 = 36 000 Kč.
* Pojištění nemovitosti je určeno částkou 20 ∙ 2 200 = 44 000 Kč.
* Odhad nemovitosti je určen částkou ve výši 2 000 Kč.

Celkem v součtu dostáváme částku ve výši 468 000 Kč.

Náklady na hypoteční úvěr ve výši 700 000 Kč jsou 468 000 Kč, úroky 380 000 Kč a poplatky 88 000 Kč.

**Zadání samostatné práce (úkolu)**

1. Dnes uložíte 20 000 Kč na úrok 5 % p. a. Kolik budete mít na účtu za 3 roky při ročním nebo měsíčním úročení?
2. Na aukci máte možnost koupit obraz. Na základě vašeho odhadu by se vám podařilo za 20 let obraz prodat za 5 mil. Kč. Jakou cenu můžete dnes za tento obraz maximálně zaplatit, aniž byste prodělali? Peníze, za které obraz koupíte, byste mohli alternativně investovat na úrok 8 % p. a.
3. Prodáváte nemovitost a přihlásili se dva kupci. První kupec nabízí okamžitě 2 500 000 Kč, druhý kupec nabízí 2 800 000 Kč, ale až za 2 roky. Banky v současnosti nabízí úrok 5 % p. a. Kterému kupci nemovitost prodáte?
4. Právě jste si vzali hypotéku na rodinný dům v hodnotě 2 000 000 Kč se splatností 20 let. Roční úroková míra je 4,5 % a platba bude prováděna měsíčně. Kolik budete koncem každého měsíce platit?
5. Klient má v plánu zakoupit nemovitost za 5 500 000 Kč. Při uzavření smlouvy zaplatí hotově 500 000 Kč a zbytek má splatit v měsíčních hypotečních splátkách vždy na konci měsíce za dobu 30 let. Kolik činí měsíční splátka, je-li úroková míra určená pro klienta ve výši 5 %?
6. Očekáváme, že za 10 let budete muset zaplatit závazek ve výši 500 000 Kč. Počítáme
s úrokovou sazbou 10 %.

a) Jakou částku byste museli dnes uložit do banky, abyste za 10 let byli schopni dostát svému závazku?

b) Jakou částku byste museli ukládat pravidelně koncem každého roku, abyste za 10 let byli schopni dostát svému závazku?

1. Zadáváte výstavbu rodinného domku na klíč a máte možnost platit těmito způsoby:

a) 600 000 Kč hned (1. 1. 2020), 1,5 mil. Kč na konci roku a 1, 2 mil. Kč na konci druhého roku

b) 4 mil. Kč na konci druhého roku

c) 3,2 mil. Kč hned (1. 1. 2020). Která varianta je pro vás nejvýhodnější, pokud je možné peníze alternativně uložit na 7% úrok?

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ŠOBA, Oldřich a Martin ŠIRŮČEK. 2017. Finanční matematika v praxi. 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing. ISBN 978-80-9264-9 ePub. (str. 70 – 93)

**Doporučená literatura**

RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P., 2013, *Finanční matematika pro každého*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-4831-3. (str. 138 – 164)

## Umořovací schéma

**Klíčová slova**

Anuita, umořovací plán, umořování se stejnými a nestejnými splátkami.

**Cíle kapitoly**

Kapitola seznamuje studenty s pojmy anuita, umořování dluhu stejnými a nestejnými splátkami, sestavování umořovacího schématu dluhu.

**Výstupy z učení**

* 2.2.5 Vypočítá současnou a budoucí hodnotu anuity, sestaví umořovací schéma dluhu.

**Příklad, uvedení vzorového úkolu**

**Příklad 1.**

Vzali jsme si úvěr ve výši 20 000 Kč na dobu 2 let při úrokové sazbě 10 % p. a. Určete výši anuity, má-li být úvěr splacen pololetními anuitami.

**Řešení:**

Úrokové období je pololetní veličina *r* je určena hodnotou 0,05 p. s., pololetí

a *D* = 20 000 Kč. Nyní využijeme vztahů (3.10.1) a (3.10.2), tedy platí

Kč. (4.10.1)

Výše pololetní anuity činí 5 624,24 Kč.

**Příklad 2.**

Kolik let se bude splácet úvěr 1 000 000 Kč při pololetních plátkách 50 000 Kč a úrokové sazbě 10 % p. a.?

**Řešení:**

Jedná se o anuitní splácení, přičemž *r* = 0,05 p. s., Kč a *D* = 1 000 000 Kč,

Využitím vztahu (3.10.3) obdržíme následující rovnost:

 (4.10.2)

Dosadíme-li příslušné hodnoty, dostáváme

 (4.10.3)

Hodnotanení definována, co tedy získaný výsledek znamená? Vysvětlení je jednoduché, pololetní splátka ve výši 50 000 Kč pokryje pouze úroky, ale nepokryje úmor

**Příklad 3.**

Klient má umořit svůj úvěr ve výši 50 000 Kč polhůtními anuitami za pět let při neměnné tříprocentní roční úrokové míře. Určete výši anuity a sestavte umořovací plán.

**Řešení:**

Dle vztahu (3.10.1) platí:

Kč. (4.10.4)

Dále dosadíme příslušné hodnoty do tabulky pro umořovací schéma viz Tabulka 3.10.1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Pořadí splátky | Výše splátky | Úrok | Úmor | Nesplacená část dluhu |
| 0 | - | - | - | 50 000 |
| 1 | 10 917,8 | 1 500,0 | 9 417,8 | 40 582,2 |
| 2 | 10 917,8 | 1 217,5 | 9 700,3 | 30 881,9 |
| 3 | 10 917,8 | 926,5 | 9 991,3 | 20 890,6 |
| 4 | 10 917,8 | 626,7 | 10 291,1 | 10 599,5 |
| 5 | 10 917,8 | 318,3 | 10 599,5 | 0 |
| Součet | 54 589,0 | 4 589,0 | 50 000,0 | x |

Tabulka 4.10.1. Tabulka pro umořovací schéma.

Zdroj: <https://is.mendelu.cz/eknihovna/opory/zobraz_cast.pl?cast=4359>

**Příklad 4.**

Výše investičního úvěru činila 2 miliony Kč. Úvěr má být splácen pravidelnými splátkami po dobu 5 let vždy na konci roku, přičemž úroková míra byla stanovena na 15 % p. a. Určete výši roční anuity, celkovou výši úroků a sestavte umořovací plán.

**Řešení:**

Dle vztahu (3.10.1) platí:

Kč. (4.10.5)

Za 5 let zaplatíme bance částku ve výši Kč. Celková výše úroku tedy činí 983 155 Kč. Pro určení umořovacího plánu využijeme tabulky pro umořovací schéma viz kapitola 3.10:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Pořadí splátky | Výše úvěru na začátku | Úrok | Anuita | Konečný zůstatek úvěru |
| 0 | - | - | - |  |
| 1 | 2 000 000 | 300 000 |  | 1 703 369 |
| 2 | 1 703 369 | 255 505 |  | 1 362 243 |
| 3 | 1 362 243 | 204 336 |  | 969 948 |
| 4 | 969 948 | 145 492 |  | 518 809 |
| 5 | 518 809 | 77 822 |  | 0 |
| Součet | x | 983 155 |  | 0 |

Tabulka 4.10.2. Tabulka pro umořovací schéma.

Zdroj: <https://adoc.pub/1-umoovatel-umoovaci-plan-diskont-smnky.html>

**Zadání samostatné práce (úkolu)**

1. Dluh 100 000 Kč má být umořen za 5 let stejnými ročními úmory s úrokovou sazbou 10 % p. a. Určete splátku ve 4. roce. [24 000 Kč]
2. Dluh 100 000 Kč má být umořen za 5 let stejnými ročními úmory s úrokovou sazbou 10 % p. a. Určete úrok ve 4. roce. [4 000 Kč]
3. Dluh 300 000 Kč má být umořen pololetními anuitami ve výši 25 000 Kč s úrokovou sazbou 10 % p. a. Kolik let budete tento úvěr splácet? [9,39 roku]
4. Dluh 300 000 Kč má být umořen pololetními anuitami ve výši 25 000 Kč s úrokovou sazbou 10 % p. a. Určete počet splátek. [19]
5. Dluh 300 000 Kč má být umořen pololetními anuitami ve výši 25 000 Kč s úrokovou sazbou 10 % p. a. Určete hodnotu poslední splátky. [19 610 Kč]
6. Úvěr ve výši 750 000 Kč s dobou splatnosti bude splacen anuitami pří úrokové sazbě 10 % p. a. Určete výši roční anuity. [88 095 Kč]
7. Úvěr ve výši 50 000 Kč je úročen roční úrokovou sazbou 11 % a splácen po dobu pěti let ročními anuitami. Kolik bude činit celkový výnos inkasovaný bankou?

 [17 652,50 Kč]

1. Kolik let se bude splácet úvěr 1 000 000 Kč při pololetních plátkách 10 000 Kč a úrokové sazbě 10 % p. a.? Sestavte umořovací plán.
2. Jak dlouho se bude splácet dluh 350 000 Kč, jestliže první úmor je 20 000 Kč a každý následující je o 10 000 Kč vyšší než v předchozí splátce? Úroková sazba je 5 % p. a.

 [7 let]

1. Sestavte umořovací plán pro tuto situaci: Dluh 100 000 Kč bude umořován ročními splátkami se stejným úmorem během 6 let při roční úrokové sazbě 10 %.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ŠOBA, Oldřich a Martin ŠIRŮČEK. 2017. *Finanční matematika v praxi*. 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing. ISBN 978-80-9264-9 ePub. (str. 77 – 93)

**Doporučená literatura**

RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P., 2013, *Finanční matematika pro každého*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-4831-3. (str. 149 – 164)

## Jednorozměrná analýza rizik

**Klíčová slova**

Riziko, analýza citlivosti, expertní rozhodování, matice hodnocení rizik, rozhodovací strom, Brainstorming.

**Cíle kapitoly**

Cílem této kapitoly je vysvětlení pojmu rizika a stručný popis procesu analýzy rizik. V kapitole lze dále nalézt návod, jak lze stanovit vznik rizika jeho pravděpodobnou výši.

**Výstupy z učení**

* 2.2.6 Provádí analýzu citlivosti.

**Příklad, uvedení vzorového úkolu**

**Příklad 1.**

Určete odhad množství kusů chovných ryb v rybníce na základě následujících informací. Předpokládejme, že všechny ryby mají zhruba stejnou váhu a při náhodném výlovu bylo vyloveno 200 kusů, bylo označeno a opět vpuštěno do rybníka. Později se akce opakovala s výsledkem 300 kusů ryb, z nichž 70 kusů jich bylo označeno během předešlého výlovu.

**Řešení:**

Předpokládejme, že množství označených ryb bylo podobné jako množství neoznačených ryb. Tedy 70/300 bude mít podobnou hodnotu jako 200/*X*, kde *X* celkový počet ryb v rybníce neboli *X = 857*. Tento odhad ovšem nepočítá s nejistotou, která je dána tím, že ryby vybíráme náhodně. V tomto případě lze použít *Bayesovu větu* viz Doporučená literatura, která pomůže určit hodnotu hledaného parametru na principu modelu nejistoty odhadu. Na základě její aplikace se překvapivě dostaneme k závěru, že nejpravděpodobnější hodnotou je dříve odhadnutá hodnota 857 kusů ryb.

**Příklad 2.**

V tomto příkladu popíšeme, jak lze vytvářet rozhodovací strom krok po kroku. Připomínáme, že se jedná o graficky zpracovaný diagram, který reprezentuje proces rozhodování o jedné nebo více záležitostech. Podniky nebo také jedinci využívají rozhodovacích stromů k určení firemních pravidel a postupů nebo v případě jistého osobního rozhodování například při plánování soukromých investicí. Pomocí stromu lze zredukovat primární řešený problém na problém výrazně jednodušší. Následující souhrn základních kroků vede ke generování rozhodovacího stromu:

1. Identifikace primárního rozhodovacího problému - jako příklad lze uvést rozhodnutí, jaký byt si koupíme.
2. Brainstorming – výpis všech nápadů – například při koupě bytu rozlišujeme proměnné cenu, velikost, umístění či vybavení.
3. Přiřazení priority vybraným proměnným – při soukromém rozhodování je tento bod subjektivní záležitostí. Tento žebříček lze sestavit také pomocí grafického znázornění.
4. Zakreslení kružnice nebo obdélníku – tímto označíme nejdůležitější proměnnou například lokalita nebo cena.
5. Vytvoření linií – rozumné je volit počet linií od dvou do čtyř a každou označíme například buď vybranou lokalitou či výběrem cenových hladin.
6. Zakreslení kružnice nebo okénka na konci každé linie – zde mohou být proměnné jako například velikost bytu. Dále z každého nového okna vytvoříme další linie například vybavení bytu nebo dostupnost sociálních služeb.
7. Pokračování dle stejného scénáře – přidáváme další linky a okna, dokud nedokončíme výběr pro připravené proměnné v úvodu vytváření rozhodovacího stromu.

Na základě určených priorit pak v závěru díky grafickému znázornění snadno vyhodnotíte situaci či problém, protože řada možností se eliminuje.

Podobným způsobem lze vytvořit například rozhodovací strom pro řešení obav.

**Příklad 3.**

Příklad je ukázkou rozhodovací tabulky pro firmu. Firma se rozhoduje, jaký bonus nabídne svým zaměstnancům v závislosti na výši půjčky. Částky uvedené v tabulce jsou pouze orientační, jedná se pouze o smyšlenou situaci.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Výše půjčky | 5 000 Kč | 2 000 000 Kč | 50 000 Kč | 100 000 Kč |
| Právnická osoba | NE | ANO | ANO | ANO |
| Nákup kola | ANO | - | ANO | - |
| Nákup auta | - | ANO | - | NE |
| Nákup vybraného zboží | ANO | - | - | NE |
| Počet zaměstnanců | - | - | - | Nad 50 |
| Věk | - | Do 35 let | - | - |
| \_ Půjčit | + | + | + | - |

Tabulka 4.11.1. Rozhodovací tabulka. Zdroj: vlastní

První sloupec obsahuje doporučení půjčit fyzické osobě, jestliže žádá o půjčku 5 000 Kč na nákup jízdního kola. Třetí sloupec naznačuje souhlas s půjčkou 2 000 000 Kč pro právnické osoby na nákup automobilu, ale ne starší než 35 let atd.

**Zadání samostatné práce (úkolu)**

1. Vytvořte matici hodnocení rizik pro nějakou konkrétní situaci

a proveďte vyhodnocení problému.

1. Sestavte vlastní rozhodovací strom pro vámi vybraný rozhodovací problém například pro koupi nového automobilu.
2. Vytvořte rozhodovací tabulku související například s problémem propouštění zaměstnanců, nákupem vybavení do firmy atd.
3. Pokuste se o modelování krátkého brainstormingu, pokud máte možnost v rámci studijní skupiny.
4. Firma se rozhoduje, zda se zúčastní určitého výběrového řízení nebo se nezúčastní. Odhaduje se, že pouze příprava na výběrové řízení bude stát 2,5 mil. Kč. Jestliže firma odhaduje, že je 50% -ní šance, že se dostanou do užšího výběru, pak bude nutné dodat podrobnější informace (odhadovaná cena 1,25 mil. Kč). Společnost odhaduje, že náklady na práci a materiál spojený s realizací případného kontraktu bude činit 3,175 mil Kč. Firma zvažuje tři možné výše ceny pro nabídku – 38,75 mil Kč, 42,5 mil Kč a 47,5 Kč. Pravděpodobnost úspěchu při těchto cenách je následující: 0,9; 0,75 a 0,35. Má se firma zúčastnit výběrového řízení, a pokud ano, s jakou cenou?

(Příklad lze nalézt na odkazu <https://docplayer.cz/14356538-Modelovani-rozhodovacich-procesu.html>)

[Ano, firma se má zúčastnit výběrového kola, a jestliže projde do dalšího řízení, pak si má vybrat nabídku o hodnotě 42,5 mil Kč]

1. XY je společnost zaměřená na provádění geologických průzkumů s cílem ověřit, zda se na zkoumaném pozemku nacházejí ložiska kovů, které by bylo možné dále komerčně využít. XY má možnost nakoupit pozemek za 3 mil. $. Pokud XY zakoupí pozemek, pak může provést geologický průzkum. Předchozí zkušenosti však ukazují, že pro tento typ pozemku geologický průzkum stojí přibližně 1 mil. $ a přináší následující výsledky:

1. mangan 1% šance,

2. zlato 0.05% šance,

3. stříbro 0.2% šance.

Pokud je nalezen jeden kov, pak je vyloučena možnost nalezení jiného kovu.

Pokud je nalezen mangan, pak může být pozemek prodán za 30 mil. $, v případě zlata za 250 mil. $ a stříbra 150 mil. $.

XY také může zaplatit 750 000 $ za práva provést třídenní předběžný průzkum předtím, než učiní rozhodnutí. Předchozí zkušenosti ukazují, že třídenní průzkum stojí 250 000 $ a zvyšuje jistotu, že nějaké ložisku kovu na pozemku je s 50% pravděpodobností. Možnost na nalezení jednotlivých kovů je následující:

1. mangan - 3%,

2. zlato - 2%,

3. stříbro - 1%.

Pokud třídenní test neprokáže přítomnost ložiska, pak šance, že ložiska zmiňovaných kovů jsou přítomna, je velmi malá a to následovně:

1. mangan - 0.75%,

2. zlato - 0.04%,

3. stříbro - 0.175%.

Co doporučíte firmě XY?

(Příklad lze nalézt na odkazu <https://docplayer.cz/14356538-Modelovani-rozhodovacich-procesu.html>)

[3 - denní test, pokud dopadne úspěšně, pak koupit pozemek]

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ARLT, J. a M. ARLTOVÁ, 2009. Ekonomické časové řady. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (str. 13 – 22)

HNILICA, J., Fotr, J., 2009, *Aplikovaná analýza rizika ve finančním managementu a investičním rozhodování*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-2560-4. (str. 12 – 53)

## Vícerozměrná analýza rizik

**Klíčová slova**

Kontingenční tabulka, kontingenční graf, precedenční, shluková, korespondenční a diskriminační analýza.

**Cíle kapitoly**

Tato kapitola přináší stručný pohled na možnosti, které nabízí vícerozměrná analýza. Student se seznámí s postupy praktikovanými při precedenční, shlukové, korespondenční
a diskriminační analýze.

**Výstupy z učení**

* 2.2.6 Provádí analýzu citlivosti.

**Příklad, uvedení vzorového úkolu**

Protože tato kapitola představuje velmi rozsáhlou oblast a navíc předpokládá jistou úroveň znalostí z matematické statistiky, analýzy, numerických metod a práci se speciálním softwarem, dotkneme se zde jen stručně tématu *kontingenčních tabulek* nebo také *matic.* Budou zde uvedeny některé odkazy, kde je možné se s danou problematikou blíže seznámit.

Kontingenční tabulka se využívá k přehledné vizualizaci vzájemného vztahu dvou statistických znaků. V praxi vzniká kontingenční tabulka tak, že se na statistických jednotkách sledují dva znaky. Řádky kontingenční tabulky odpovídají možným hodnotám prvního znaku, sloupce pak možným hodnotám druhého znaku. V příslušné buňce kontingenční tabulky je pak zařazen počet případů, kdy zároveň měl první znak hodnotu odpovídající příslušnému řádku a druhý znak hodnotu odpovídající příslušnému sloupci. Je možné, aby jeden řádek či sloupec odpovídal více možným hodnotám znaku. To se děje v případě, kdy znak nabývá některých hodnot příliš zřídka, takže je vhodné spojit více možných hodnot. Součty (mezisoučty) všech hodnot v každém řádku resp. sloupci, nesou informaci o počtu výskytu jevů, při nichž nabyl první (resp. druhý) znak příslušné hodnoty bez ohledu na hodnotu druhého (resp. prvního) znaku.

Kromě prostého popisu četností kombinací hodnot dvou znaků nabízí kontingenční tabulka také možnost testovat, zda mezi oběma znaky existuje nějaký vztah. K tomu lze užít například *Testu dobré shody*, viz doporučené odkazy. Znaky užité k zobrazení v kontingenční tabulce pak musí představovat diskrétní hodnoty. Je možné tedy využít kvalitativní, diskrétně kvantitativní či spojitě kvantitativní znaky, v posledním případě však pouze s rozdělením jednotlivých znaků do skupin – tzv. *skupinové třídění.*

Pro práci s kontingenčními tabulkami lze úspěšně využít Excelu.

**Příklad 1.**

Je dána jednoduchá tabulka obsahující tři sloupce – částka, typ a kanál. Jde o tabulku, v níž jsou údaje o prodeji produktů z e-shopu.



Obr. 4.12.1. Zdrojová tabulka se třemi sloupci.

Zdroj: <https://biportal.cz/kontingencni-tabulka/>

V další ukázce příkladu kontingenční tabulky je tabulka přehledu aut v jistém autobazaru. Díky kontingenční tabulce lze pak odpovědět na otázky, kolik stojí auta různých značek, či kolik aut je naskladněno ve kterém měsíci nebo jak se liší průměrné ceny dle barev. Více na odkazu <https://exceltown.com/navody/kontingencni-tabulky-prehled-navodu/zakladni-navod-pro-vytvoreni-kontingencni-tabulky/> nebo <https://office.lasakovi.com/excel/kontingencni-tabulka/serial-kontingencni-tabulky-grafy-excel/>.



Obr. 4.12.2. Kontingenční tabulka. Zdroj: <https://exceltown.com/navody/kontingencni-tabulky-prehled-navodu/zakladni-navod-pro-vytvoreni-kontingencni-tabulky/>

Kontingenční tabulky pomocí aplikace v Excelu transformují data na přehledy a můžeme tak vidět několik pohledů na data podle potřeby. Z původní ne příliš srozumitelné tabulky lze pak vyrobit plnohodnotný report. Podobným způsobem lze zpracovávat data pomocí tzv. *kontingenčních grafů*. Pro další studium této problematiky lze například nahlédnout na stránky webu Microsoftu.

**Zadání samostatné práce (úkolu)**

Zadání úloh v této kapitole je ponecháno na vyučujícím, protože záleží s jakým softwarem a s jakým tématem z této rozsáhlé kapitoly bude mít možnost aktuálně se studenty pracovat.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

ARLT, J. a M. ARLTOVÁ, 2009. *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing. ISBN 978-80-86946-85-6. (str. 163 – 273)

**Doporučená literatura**

HNILICA, J., Fotr, J., 2009, *Aplikovaná analýza rizika ve finančním managementu a investičním rozhodování*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-2560-4. (str. 47 – 71)

## Tvorba scénářů

**Klíčová slova**

Kvalitativní a kvantitativní scénář, simulace Monte Carlo, What-if analýza.

**Cíle kapitoly**

V kapitole se student seznámí se všemi atributy spojenými s tvorbou scénářů. Dále kapitola nabízí popis základní simulační metody Monte Carlo*.*

**Výstupy z učení**

* 2.2.6 Provádí analýzu citlivosti.

**Příklad, uvedení vzorového úkolu**

**Příklad 1.**

Popište princip využití metody Monte Carlo pro výpočet obsahu dané plochy.

**Řešení:**

Plocha omezená spojitou funkcí na daném konečném intervalu může být odhadnuta pomocí obdélníkové metody, která je založena na následujícím postupu. Provedeme dělení intervalu na *n totožných* podintervalů a dále konstruujeme obdélníky, které se svým jedním bodem horní hrany dotýkají grafu funkce. Aproximaci plochy pod grafem pak získáme jako součet obsahů těchto obdélníků. Čím je dělení intervalu jemnější, tím jsou obdélníky užší a metoda je pak samozřejmě přesnější.

Princip metody Monte Carlo spočívá v určení střední hodnoty z náhodně generovaných čísel. V případě plošných útvarů to lze provést tak, že daný útvar ohraničíme plochou, jejíž obsah jsme schopni určit a pak pomocí počítače generujeme body, přičemž zjišťujeme, zda daný bod leží uvnitř daného útvaru. Dále postupujeme podle následujícího vztahu:

 (4.13.1)

V tomto případě lze pro metodu Monte Carlo určit také směrodatnou odchylku, protože je-li

*N* celkový počet vygenerovaných bodů, pak lze směrodatnou odchylku určit pomocí hodnoty . (4.13.2)

Pokud je k dispozici vhodný software a uživatel je zkušenější programátor, pak tato úloha patří k jednoduchým cvičením.

**Zadání samostatné práce (úkolu)**

1. Společnost ABC a.s. má dne 15. dubna splatit 1 mil. Kč. Počáteční zůstatek běžného účtu v pondělí 5. dubna je 2 350,25 tis. Kč. Do 19. dubna přijdou na účet tržby z 5. - 10. dubna, naopak bude nutné uhradit náklady za období 5. – 17. dubna. Tržby v jednotlivých dnech v týdnu mají rovnoměrné rozdělení viz zadání níže. Náklady tvoří 70 % z tržeb. Jaká je pravděpodobnost, že firma bude muset žádat o úvěr?



Tabulka 4.13.1. Tržby v jednotlivých dnech v týdnu. Zdroj: <http://www.simulace.info/index.php/Monte_Carlo_method_application_in_simulations/cs>

1. Dovoz zeleniny z jižní Evropy je ovládán dvěma firmami A a B. Podíl na trhu v prvním týdnu je u firmy A 55 % a u firmy B 45 %. Vzhledem k problémům na hranicích se stává, že zboží bývá občas dodáno se zpožděním. U firmy A se tak děje s 20 % dodávek, u firmy B s 25 % dodávek. V případě zpoždění se očekává, že 10 % zákazníků příští zboží objedná u konkurenční firmy. Ve čtyřicátém týdnu je plánováno převzetí firmy A zahraniční firmou, přičemž hlavním kritériem kupní ceny bude podíl na tuzemském trhu.

Jaký podíl na trhu za výše uvedených předpokladů lze očekávat u firmy A ve čtyřicátém týdnu?

1. Uveďte příklady z běžné praxe, ve kterých lze použít při analýze rizik metodu What-if.

**Studijní literatura**

**Povinná literatura**

HNILICA, J., Fotr, J., 2009, *Aplikovaná analýza rizika ve finančním managementu a investičním rozhodování*. Grada Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-2560-4. (str. 57 – 71)