Nominální a reálná úroková sazba

Doposud jsme mluvili o nominální úrokové sazbě, to znamená takové, u které jsme neuvažovali inflaci. Každá inflace znehodnocuje nejen kapitál, ale také úroky. Jestliže budeme do hodnoty úrokové sazby zahrnovat i inflaci, budeme hovořit o reálné úrokové míře (reálném úroku).

Označme:

K_0 – kapitál na počátku úrokovacího období

K_r – reálná výše kapitálu na konci úrokovacího období

i – nominální úroková sazba v setinách

i_r – reálná úroková sazba v setinách

$i_{\inf}$ – míra inflace

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že úrokovací období je roční, počáteční kapitál budeme úročit na konci úrokovacího období nominální úrokovou sazbou a pak diskontovat mírou inflace.

$$K_r = K_0 \cdot \frac{1+i}{1+i_{\inf}}$$

Na základě reálného kapitálu si vypočítáme reálnou úrokovou sazbu i_r jako poměr výše úroku a počátečního kapitálu.

$$i_r = \frac{K_r - K_0}{K_0} \quad \Rightarrow \quad K_0 \cdot i_r = K_r - K_0 \quad \Rightarrow \quad K_0 \cdot (1 + i_r) = K_r$$

Dosadíme-li tento vztah do přecházejícího výrazu za K_r obdržíme:

$$K_0 \cdot (1+i_r) = K_0 \cdot \frac{1+i}{1+i_{\inf}} \quad \Rightarrow \quad 1+i_r = \frac{1+i}{1+i_{\inf}} \quad \Rightarrow \quad 1+i_r+i_{\inf}+i_r \cdot i_{\inf} = 1+i$$

$$i = i_r + i_{\inf} + i_r \cdot i_{\inf}$$

Tento vztah se nazývá Fischerova rovnice.

Poznámka:
Při nízké míře inflace a nízké reálné úrokové míře zanedbáváme někdy součin $i_r \cdot i_{\inf}$ a vztah mezi reálnou a nominální úrokovou mírou volíme $i = i_r + i_{\inf}$.

Příklad
Jestliže zapůjčíme kapitál s tím, že nám bude vrácen za 1 rok a předpokládáme-li roční nominální úrokovou míru 10 % a míru inflace nulovou, získáme za rok reálně o 10 % více. Jestliže bude míra inflace 15 %, máme za rok reálně o 5 % méně. Získali jsme sice kapitál zvýšený o 10 %, ale za zboží a služby vydáme o 15 % více než dříve.

Příklady k procvičení

1. Klient, který chce uložit 100 000 Kč na dobu jednoho roku, se může rozhodnout mezi vkladem na vkladní knížku, která vynáší 2,45 % p.a. při složeném měsíčním úročení a vkladem na spořící účet, který je úročen 2,5 % p.a. při pololetním úročení. Která z těchto alternativ nabízí vyšší výnos?
[spořící účet]

2. Jaká roční efektivní úroková míra je ekvivalentní 8% p.a. při měsíční frekvenci?
[0,0829995]

3. Bez použití efektivní úrokové míry spočítejte na kolik se zúročí počáteční vklad 100 Kč, 1 000 Kč, 10 000 Kč, 100 000 Kč, 1 000 000 Kč, 100 000 000 Kč při nominální úrokové sazbě 13 % p.a. a při měsíčním úročení za dobu pěti let. Danou úlohu řešte poté za použití efektivní úrokové míry a výsledky porovnejte. Pokud se výsledky liší, zdůvodněte proč.
[190,89 Kč; 1 908,86 Kč; 19 088,57 Kč; 190 885,65 Kč; 1 908 856,54 Kč; 190 885 653,51 Kč]

4. K dispozici máte 1 mil. Kč. Uložili jste tuto sumu na účet, který je úročen 3 % p.a. při ročním připisování úroků.
   a. Kolik Kč máte k dispozici po dvou letech?
   b. Kolik si můžete koupit kusů výrobku, jehož jednotková cena je 5 000 Kč, pokud tato cena zůstane zachována i po dvou letech?
   c. Kolik byste si mohli koupit kusů daného výrobku po dvou letech, pokud by inflace první i druhý rok byla stejná ve výši 2,5 % za rok?
   d. Kolik kusů výrobku byste si mohli koupit po dvou letech, pokud byste museli platit daně z úroků a nebyla by inflace?
   e. Kolik kusů výrobku byste si mohli koupit po dvou letech, pokud byste museli platit daně a inflace by byla ve výši 2,5 % ročně?
   f. Kolik kusů výrobku byste si mohli koupit po dvou letech, pokud byste museli platit daně a inflace by byla ve výši 2,5 % první rok a 3 % druhý rok?

[a. 1 060 900 Kč; b. 212; c. 201; d. 210; e. 200; f. 199]

Spoření

V přecházející části jsme si ukázali, jak zjistit konečnou nebo počáteční hodnotu kapitálu, přičemž se jeho hodnota v průběhu času nenavyšovala ani nesnižovala.
Při spoření budeme předpokládat, že ukládáme kapitál (peněžní částku) v pravidelných intervalech, a naším úkolem bude zjistit, kolik uspoříme i s úroky za určitou dobu.

Spoření rozdělíme na:

- spoření krátkodobé – v rámci jednoho úrokovacího období (roku)
- spoření dlouhodobé – spoříme několik úrokovacích období po sobě

Spoření krátkodobé

Předpokládejme, že
– úrokovací období je jeden rok – úroky jsou připisovány najednou vždy na konci roku
– pravidelné částky budeme ukládat m-krát za rok ($m = 2$; $m = 4$; $m = 12$)

Podle toho, zda budeme kapitál ukládat na počátku každé m-tiny roku nebo na konci každé m-tiny roku, budeme rozlišovat:

- spoření předlhůtní
- spoření polhůtní

Spoření krátkodobé předlhůtní

Předpoklady:

- na počátku každé m-tiny roku budeme ukládat $\frac{1}{m}$ Kč při úrokové sazbě i
- celková roční naspořená částka se bude tedy rovnat 1 Kč + úrok

Protože se pohybujeme v rámci jednoho úrokovacího období, použijeme pro zjištění výše úroku jednoduché úročení.

Tabulka Úroky z jednotlivých vkladů

Pořadí vkladu	Počet m –tin do konce roku	Úrok z vkladu do konce roku
1	$m \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m}{m} = \frac{m}{m^2} \cdot i$
2	$(m-1) \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{m-1}{m^2} \cdot i$
3	$(m-2) \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m-2}{m} = \frac{m-2}{m^2} \cdot i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$1 \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m^2} \cdot i$

Celkový úrok vypočítáme jako součet úroků z jednotlivých vkladů.

Tedy:

$$u = \frac{i}{m^2} \cdot \left[m + (m-1) + (m-2) + \cdots + 1\right] = \frac{i}{m^2} \cdot \frac{m \cdot (m+1)}{2} = \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i$$

kde výraz $m + (m-1) + (m-2) + \cdots + 1$ je aritmetická posloupnost a její součet bude:

$$S_m = \frac{m}{2} \cdot (m+1)$$

neboť $a_1 = m$; $a_n = 1; n = m$

Celková uspořená částka S_1 za 1 rok, jestliže každou $\frac{1}{m}$ roku spoříme $\frac{1}{m}$ z 1 Kč, bude:

$$S_1 = m \cdot \frac{1}{m} + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i = 1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i$$

Jestliže spoříme x Kč každou $\frac{1}{m}$ roku, potom můžeme celkovou částku naspořenou za jeden rok vyjádřit:

$$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)$$

Víme-li, kolik bude činit celková uspořená částka z 1 Kč, potom z částky $x \cdot m$ bude celková naspořená částka $x \cdot m$-krát větší.

Příklad

Kolik uspoříme včetně úroků do konce roku, jestliže ukládáme počátkem každého měsíce 1 200 Kč při úrokové sazbě 5 % p.a.?

Řešení:

Obecně:

$$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)$$

Numericky:

$$S_x = 12 \cdot 1200 \cdot \left(1 + \frac{12+1}{2 \cdot 12} \cdot 0{,}05\right) = 14\,400 \cdot 1{,}02708\overline{3} = 14\,790\ Kč$$

Do konce roku uspoříme 14 790 Kč.

Spoření krátkodobé polhůtní

Předpoklady:

- na konci každé m-tiny roku budeme ukládat $\frac{1}{m}$ Kč při úrokové sazbě i
- celková roční naspořená částka se bude tedy rovnat 1 Kč + úrok

Protože se pohybujeme v rámci jednoho úrokovacího období, použijeme pro zjištění výše úroku jednoduché úročení.

Tabulka Úroky z jednotlivých vkladů

Pořadí vkladu	**Počet m –tin do konce roku**	**Úrok z vkladu do konce roku**
1	$(m-1) \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{m-1}{m^2} \cdot i$
2	$(m-2) \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m-2}{m} = \frac{m-2}{m^2} \cdot i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-1$	$1 \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m^2} \cdot i$
m	$0 \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{0}{m} = \frac{0}{m^2} \cdot i = 0$

Celkový úrok vypočítáme jako součet úroků z jednotlivých vkladů.

Tím, že částky jsou ukládány vždy na konci příslušného období (části roku), je oproti předlhůtnímu spoření počet těchto období (po které je vklad úročen) o jedno období nižší. Z poslední úložky již nebudeme mít žádný úrok, neboť bude uložena na konci roku.

Celkový úrok vypočítáme obdobně jako u předlhůtního spoření. Tedy:

$$u = \frac{i}{m^2} \cdot \left[(m-1) + (m-2) + \cdots + 1 + 0 \right] = \frac{i}{m^2} \cdot \frac{m \cdot (m-1)}{2} = \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i$$

kde výraz $(m-1) + (m-2) + \cdots + 1 + 0$ je aritmetická posloupnost a její součet bude:

$$S_m = \frac{m}{2} \cdot \left[(m-1) + 0 \right]$$

neboť $a_1 = m-1$; $a_n = 0$; $n = m$

Celková uspořená částka $S_1^{'}$ za 1 rok, jestliže každou $\frac{1}{m}$ roku spoříme $\frac{1}{m}$ z 1 Kč, bude:

$$S_1^{'} = m \cdot \frac{1}{m} + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i = 1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i$$

Jestliže spoříme x Kč každou $\frac{1}{m}$ roku, potom můžeme celkovou částku naspořenou za jeden rok vyjádřit:

$$S_x^{'} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i \right)$$

Víme-li, kolik bude činit celková uspořená částka z 1 Kč, potom z částky $x \cdot m$ bude celková naspořená částka $x \cdot m$-krát větší.

Příklad

Kolik uspoříme do konce roku, jestliže ukládáme koncem každého měsíce 1 200 Kč při 5 % p.a.?

Řešení:

Obecně:

$$S_x^{'} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i \right)$$

Numericky:

$$S_x' = 12 \cdot 1200 \cdot \left(1 + \frac{12-1}{2 \cdot 12} \cdot 0{,}05\right) = 14400 \cdot 1{,}02291\overline{6} = 14730\ Kč$$

Do konce roku při polhůtním spoření uspoříme 14 730 Kč.

Ze základních vzorců můžeme odvodit další výrazy, které používáme podle potřeby pro výpočet výše vkladu a dosažení naspořené částky na konci roku nebo pro výpočet úrokové sazby.

Výpočet výšky vkladu

předlhůtní:

$$x = \frac{S_x}{m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}$$

polhůtní:

$$x = \frac{S_x'}{m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}$$

Výpočet úrokové sazby

předlhůtní:

$$i = \left(\frac{S_x}{m \cdot x} - 1\right) \cdot \frac{2 \cdot m}{m+1}$$

polhůtní:

$$i = \left(\frac{S_x'}{m \cdot x} - 1\right) \cdot \frac{2 \cdot m}{m-1}$$

Příklad

Kolik musíme spořit na počátku každého měsíce, abychom za rok naspořili 10 000 Kč při 5 % p.a.?

Řešení:

Obecně:

$$x = \frac{S_x}{m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}$$

Numericky:

$$x = \frac{10000}{12 \cdot \left(1 + \frac{12+1}{2 \cdot 12} \cdot 0{,}05\right)} = \frac{10000}{12{,}325} = 811{,}36\ Kč$$

Abychom za rok uspořili 10 000 Kč, musíme ukládat začátkem každého měsíce 811,36 Kč.

Příklad
Jaká je procentní roční úroková sazba, jestliže za jeden rok uspoříme 10 000 Kč a ukládáme koncem každého čtvrtletí 2 400 Kč?

Řešení:
Obecně:

$$i = \left(\frac{S_x'}{m \cdot x} - 1\right) \cdot \frac{2 \cdot m}{m - 1}$$

Numericky:

$$i = \left(\frac{10000}{4 \cdot 2400} - 1\right) \cdot \frac{2 \cdot 4}{4 - 1} = 0{,}041\overline{6} \cdot 2{,}\overline{6} = 0{,}111\overline{1}$$

Požadovanou částku uspoříme za rok při úrokové sazbě 11,11 % p.a.

Spoření dlouhodobé

O dlouhodobém spoření hovoříme tehdy, jestliže trvá déle než jedno úrokovací období (např. jeden rok). Budeme předpokládat, že v rámci úrokovacího období ukládáme peněžní částku vždy na začátku nebo na konci úrokovacího období. Daná peněžní částka bude vždy stejná. Použijeme složené úročení.

Vzorce budeme odvozovat pro úrokovací období jeden rok.

Pokud bychom chtěli odvodit vzorec pro jiné (např. měsíční) úrokovací období, postup by byl zcela stejný, jen bychom zaměnili vše, co se týká ročního úrokovacího období (roční úroková míra, počet celých let spoření, ukládání na začátku resp. na konci roku), za pojmy (a čísla) vztahující se k novému úrokovacímu období (měsíční úroková míra, počet celých měsíců spoření, ukládání na začátku resp. na konci měsíce).
Při takovémto odvozování je nutné dodržet logiku, která bude uvedena níže na příkladu ročního úrokovacího období.

Spoření dlouhodobé předlhůtní

Na počátku každého úrokovacího období (v našem případě na počátku každého roku) ukládejme částku a. Naším úkolem bude zjistit, kolik budou činit úspory na konci n-tého období při úrokové sazbě i. Pro určení celkové uspořené částky včetně úroků na konci n-tého období vypočítáme výši vkladů za každý rok až do konce n-tého roku, a tyto uspořené částky sečteme. Ptáme se tedy, kolik nám přinese každá úložka až do konce spoření.

Tabulka 5.3 Hodnota jednotlivých vkladů až do konce spoření

Pořadí úložky	Počet období uložení peněžní částky do konce spoření	Celková hodnota na konci posledního období
1	n	$a \cdot (1+i)^n$
2	$n-1$	$a \cdot (1+i)^{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	1	$a \cdot (1+i)^1$

Konečný stav úspor S vypočítáme jako součet hodnot jednotlivých úložek na konci n-tého období.

$$S = a \cdot (1+i)^n + a \cdot (1+i)^{n-1} + a \cdot (1+i)^{n-2} + \cdots + a \cdot (1+i) = a \cdot (1+i) \cdot \left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1\right]$$

Výraz v hranaté závorce je geometrická řada, kde $a_1 = 1$, kvocient $q = (1+i)$ a počet členů je n.

Protože víme, že pro součet geometrické řady platí

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

můžeme pro součet S psát

$$S = a.(1+i) \cdot \left[1 \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}\right] = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$S = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Jestliže $a = 1\ Kč$, potom výraz:

$$(1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = s_n'$$

nazýváme střadatelem předlhůtním a udává nám, kolik ušetříme za n období při úrokové sazbě i, jestliže na počátku každého období uložíme 1 Kč.

Potom pro výši konečné hodnoty můžeme využít zkráceného vzorce:

$$S = a \cdot s'_n$$

Výpočet velikosti vkladu (splátky, úložky)

$$a = \frac{S \cdot i}{(1+i) \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]} = \frac{S}{s'_n}$$

Výpočet doby spoření

$$S \cdot i = a \cdot (1+i) \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]$$

$$\frac{S \cdot i}{a \cdot (1+i)} = (1+i)^n - 1$$

$$\frac{S \cdot i}{a \cdot (1+i)} + 1 = (1+i)^n$$

$$\ln\left(\frac{S \cdot i}{a \cdot (1+i)} + 1\right) = \ln\left((1+i)^n\right)$$

$$\ln\left(\frac{S \cdot i}{a \cdot (1+i)} + 1\right) = n \cdot \ln(1+i)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S \cdot i}{a \cdot (1+i)} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

Příklad
Kolik uspoříme za 8 let, jestliže budeme ukládat na počátku každého roku 5 000 Kč při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a.?

Řešení:
Obecně:

$$S = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Numericky:

$$S = 5000 \cdot (1+0{,}05) \cdot \frac{(1+0{,}05)^8 - 1}{0{,}05} = 5250 \cdot 9{,}54910887578125 = 50132{,}82$$

Za 8 let uspoříme 50 132,82 Kč.

Spoření dlouhodobé polhůtní

Jestliže ukládáme peněžní částky na konci úrokovacího období (v našem případě na konci roku), hovoříme o spoření polhůtním. Chceme vypočítat, kolik uspoříme za n období, jestliže ukládáme na konci každého období peněžní částku a.

Tabulka 5.4 Hodnota jednotlivých vkladů až do konce spoření

Pořadí úložky	Počet období uložení peněžní částky do konce spoření	Celková hodnota na konci posledního období
1	$n-1$	$a\cdot(1+i)^{n-1}$
2	$n-2$	$a\cdot(1+i)^{n-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	1	$a\cdot(1+i)^{1}$
n	0	$a\cdot(1+i)^{0}=a$

Konečný stav vkladů S' na konci n-tého období je opět dán součtem geometrické řady (hranatá závorka)

$$S'=a\cdot(1+i)^{n-1}+a\cdot(1+i)^{n-2}+\cdots+a\cdot(1+i)+a=a\cdot\left[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\cdots+1\right]$$

Přitom $q=(1+i)$; $a_1=1$

Potom součet geometrické řady bude

$$S'=a\cdot\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}=a\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$S'=a\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

Jestliže $a=1\,Kč$ potom výraz

$$\frac{(1+i)^n-1}{i}=s_n''$$

nazýváme střadatelem polhůtním a udává nám, kolik ušetříme za n období při úrokové sazbě i, jestliže na konci každého období uložíme 1 Kč.

Potom pro výši konečné hodnoty můžeme využít zkráceného vzorce:

$$S'=a\cdot s_n''$$

Výpočet výše vkladu (splátky, úložky)

$$a = \frac{S' \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{S'}{s''_n}$$

Výpočet doby spoření n

$$S' \cdot i = a \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]$$
$$\frac{S' \cdot i}{a} = (1+i)^n - 1$$
$$\frac{S' \cdot i}{a} + 1 = (1+i)^n$$
$$\ln\left(\frac{S' \cdot i}{a} + 1\right) = \ln\left((1+i)^n\right)$$
$$\ln\left(\frac{S' \cdot i}{a} + 1\right) = n \cdot \ln(1+i)$$
$$n = \frac{\ln\left(\frac{S' \cdot i}{a} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

Příklad
Za jak dlouho uspoříme 50 000 Kč, jestliže koncem každého roku ukládáme 7 000 Kč při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a.?

Řešení:
Obecně:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S' \cdot i}{a} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

Numericky:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{50\,000 \cdot 0{,}05}{7\,000} + 1\right)}{\ln(1 + 0{,}05)} = \frac{0{,}3053816496}{0{,}0487901641} = 6{,}259$$

Abychom uspořili 50 000 Kč při daných podmínkách, musíme spořit více než 6 roků.

Je evidentní, že spořit necelé úrokové období nelze (přesněji řečeno lze, ale porušili bychom celou logiku spoření), protože ukládáme pravidelně na konci (případně na začátku) období a nemůžeme dát poslední vklad uprostřed úrokovacího období (za uvedených předpokladů).

U výše uvedeného příkladu budeme mít po 6 letech naspořeno 47 613,39 Kč. Zbývající sumu do požadované částky obdržíme pomocí jednoduchého (jsme v rámci jednoho úrokovacího období) úročení (pokud bychom přesáhli celé úrokovací období, použijeme kombinované úročení).
Pokud bychom tedy vyšli z naspořené částky a zadané úrokové sazby a pokud bychom tuto sumu úročili celý rok, obdrželi bychom na konci roku 49 994,06 Kč. Pokud bychom k této částce přidali dalších 7 000 Kč, přesáhli bychom značně požadovanou částku (konkrétně bychom měli 56 994,06 Kč, což odpovídá spoření za daných podmínek po dobu 7 let).
Je tedy otázkou, co chceme přesně spočítat.
Pokud chceme minimalizovat vklady, budeme spořit 6 let a dalších 361 dní (tj. 1 rok a 1 den) necháme částku naspořenou za 6 let úročit. V našem případě budeme mít po 6 letech spoření a 1 roku úročení k dispozici částku 49 994,06 Kč, která se za další jeden den zúročí na částku 50001,0036194 Kč. Požadovanou částku z našeho příkladu tímto způsobem přesáhneme o zhruba 1 Kč. Přičemž jsme uložili celkem 42 000 Kč.
Pokud nechceme minimalizovat vklady, ale chceme naspořit minimálně zadanou částku, zaokrouhlíme výsledek výpočtu (6,259) na celé číslo nahoru, tj. v našem konkrétním případě na 7 let. Naspoříme tak částku 56 994,06 Kč, přičemž jsme uložili celkem 49 000 Kč.

Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření

V praxi většinou spoříme více roků a peněžní částky většinou ukládáme pravidelně každý měsíc (případně i v jiných pravidelných intervalech) – tedy m-krát za rok. Stejně jako u předcházejících úloh rozdělíme toto spoření na spoření předlhůtní a polhůtní podle toho, kdy budeme peněžní částky ukládat.

Kombinované spoření předlhůtní

Chceme zjistit, kolik uspoříme do konce n-tého roku, jestliže budeme ukládat peněžní částku na počátku každé m-tiny roku.

Nejdříve vypočítáme, kolik uspoříme včetně úroků na konci prvního roku, což zjistíme ze vztahu pro krátkodobé předlhůtní spoření. Tuto částku budeme mít k dispozici vždy na konci roku. Tím jsme převedli úlohu na případ, kdy koncem každého roku uložíme částku a, kterou jsme uvažovali u dlouhodobého spoření. Tuto částku a nahradíme uspořenou částkou S_x.

$$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) = a$$

$$S = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Tedy:

$$S = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Z daného výrazu vidíme, že jsme pro výpočet celkové uspořené částky použili dlouhodobého polhůtního spoření, i když jsme jednotlivé částky ukládali na počátku každé m-tiny roku. Je to dáno tím, že naspořená částka S_x je vlastně ukládána (naspořena) vždy na konci každého roku.

Výpočet výše vkladu x

$$x = \frac{S}{m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Výpočet doby spoření n

Použijeme vzorec pro polhůtní dlouhodobé úročení odvozený dříve

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S' \cdot i}{a} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

a za a dosadíme

$$m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)$$

výsledný vzorec tedy bude (S' nahradíme S pro předlhůtní spoření)

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S \cdot i}{m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

Příklad

Kolik uspoříme za 10 let, jestliže spoříme začátkem každého čtvrtletí 2 500 Kč při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a.?

Řešení:

Obecně:

$$S = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Numericky:

$$S = 4 \cdot 2500 \cdot \left(1 + \frac{4+1}{2 \cdot 4} \cdot 0{,}05\right) \cdot \frac{(1+0{,}05)^{10} - 1}{0{,}05} = 10\,000 \cdot 1{,}03125 \cdot 12{,}5778925 = 129\,709{,}52$$

Při stanovených podmínkách uspoříme za 10 let 129 709,52 Kč.

Příklad
Kolik musíme spořit počátkem každého měsíce, abychom za 10 let uspořili 1 mil. Kč při neměnné úrokové sazbě 5 % p.a.?

Řešení:
Obecně:

$$x = \frac{S}{m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Numericky:

$$x = \frac{1\,000\,000}{12 \cdot \left(1 + \frac{12+1}{2 \cdot 12} \cdot 0{,}05\right) \cdot \frac{(1+0{,}05)^{10} - 1}{0{,}05}} = \frac{1\,000\,000}{12{,}325 \cdot 12{,}5778925} = 6450{,}68$$

Při stanovených podmínkách musíme měsíčně spořit 6 450,68 Kč.

Kombinované spoření polhůtní

Při řešení této úlohy budeme postupovat obdobným způsobem jako při spoření předlhůtním. Opět nahradíme částku a spořením krátkodobým polhůtním $S_x^{'}$.

$$S_x^{'} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) = a$$

$$S' = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Tedy:

$$S' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Výpočet výše vkladu x

$$x = \frac{S'}{m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Výpočet doby spoření n

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S' \cdot i}{m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

Příklad
Kolik musíme spořit koncem každého měsíce, abychom za 10 let uspořili 1 mil. Kč při neměnné úrokové sazbě 5 % p.a.?

Řešení:
Obecně:

$$x = \frac{S'}{m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Numericky:

$$x = \frac{1000\,000}{12 \cdot \left(1 + \frac{12-1}{2 \cdot 12} \cdot 0{,}05\right) \cdot \frac{(1+0{,}05)^{10} - 1}{0{,}05}} = \frac{1000\,000}{12{,}275 \cdot 12{,}5778925} = 6\,476{,}95$$

Při uvedených podmínkách je nutno měsíčně ukládat 6 476,9512 Kč.

Příklad
Jak dlouho musíme spořit koncem každého měsíce 5 000 Kč, aby uspořená částka byla ve výši 100 000 Kč při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a.?

Řešení:
Obecně:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S' \cdot i}{m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

Numericky:

$$n=\frac{\ln\left(\dfrac{1000000\cdot 0{,}05}{12\cdot 5000\cdot\left(1+\dfrac{12-1}{2\cdot 12}\cdot 0{,}05\right)}+1\right)}{\ln(1+0{,}05)}=\frac{\ln(1{,}81466395112)}{\ln(1{,}05)}=\frac{0{,}5959}{0{,}04879}=12{,}213568$$

Uvedenou částku při stanovených podmínkách uspoříme za přibližně 12 roků a 2 měsíce (0,213568 roku je, při 360 dnech za rok, 77 dnů). Tento výsledek je ovšem nepřesný.

Tady se opět dostáváme do situace, že máme spořit dobu, která neodpovídá přirozeným násobkům období, za které vkládáme pravidelně stejné částky. Je tedy nutno opět dořešit onu necelou část úrokovacího období.

Pokud budeme spořit za daných podmínek 12 let, budeme mít naspořeno 976 913,64 Kč. Zbývá tedy 23 086,36 Kč.

Do konce prvního měsíce (po skončených 12 letech) nám 976 913,64 Kč přinese úrok 4 070,47 Kč. Celkem tedy budeme mít na konci tohoto měsíce 980 984,11 Kč, což je méně, než kolik požadujeme (1 mil. Kč). Proto vložíme další vklad (5 000 Kč). Protože se úroky připisují až na konci roku, přinese nám částka ze začátku roku opět úrok 4 070,47 Kč i za druhý měsíc. Úroky nám přinese i náš poslední vklad, a to ve výši 20,83 Kč. Celkem tedy budeme na konci druhého měsíce (13.roku) mít 976 913,64 Kč + 2*4 070,47 Kč + 5 000 Kč + 20,83 Kč, celkem tedy 990 075,41. Což je opět méně než požadovaná částka. Proto vložíme další pravidelný vklad 5 000 Kč. Na konci třetího měsíce bychom měli 976 913,64 Kč + 3*4 070,47 Kč + 5 000 Kč + 2*20,83 Kč + 5 000 Kč + 20,83 Kč, celkem tedy 999 187,54 Kč. Zde už je rozdíl požadované částky a naspořené částky menší než pravidelný vklad. Musíme se tedy rozhodnout, co preferujeme.

Pokud preferujeme minimalizaci celkové vložené částky, nebudeme na konci třetího měsíce vkládat další pravidelný vklad, ale necháme zatím naspořenou částku pouze úročit. Částka 976 913,64 Kč přináší každý den 135,68 Kč. Každý vklad v hodnotě 5 000 Kč přináší každý den 0,69 Kč. Dohromady tedy máme za jeden den úrok 135,68 Kč + 2*0,69 Kč = 137,06 Kč (ve 13.roku spoření jsme provedly dva vklady). Rozdíl mezi požadovanou částkou a částkou naspořenou a zúročenou za první tři měsíce 13.roku spoření je 812,46 Kč. Tento rozdíl získáme na úrocích za 6 dnů ($\frac{812{,}46}{137{,}06}=5{,}93$). Když to všechno shrneme, je výsledek následující. Spoříme 12 let a dva měsíce a další 36 dnů necháme naspořenou částku úročit. Na účtu budeme mít 1 000 009,9 Kč. Celkem jsme uložili 730 000 Kč.

Pokud bychom chtěli mít minimálně požadovanou částku naspořenou co nejdříve, vložili bychom na konci třetího měsíce 13.roku ještě jeden vklad a měli bychom naspořeno 1 004 187,54 Kč, přičemž bychom celkem uložili 735 000 Kč.

Příklady k procvičení

1. Kolik uspoříme do konce roku, jestliže ukládáme počátkem každého měsíce 1 200 Kč při úrokové sazbě 9 % p.a.?

   [15 102 Kč]

2. Kolik musíme ukládat koncem každého měsíce, abychom za rok naspořili 21 000 Kč při úrokové sazbě 6 % p.a.?

   [1 703,17 Kč]

3. Jak často musíme ukládat stejnou částku na konci období, abychom na konci roku měli naspořeno 50 000 Kč? Úroková sazba je 6 % p.a.

   [$m = 48543{,}68932 \cdot \frac{1}{x} + 0{,}029126214$]

4. Kolik musíme spořit počátkem každého měsíce, abychom na konci roku měli při úrokové sazbě 2,8 % p.a. 1 milion Kč?

   [82 088,33 Kč]

5. Kolik uspoříme za půl roku, jestliže začátkem každého měsíce ukládáme 1 000 Kč při úrokové sazbě 3,5 % p.a. a půlročním úročení?

   [6 061,25 Kč]

6. Jak často musíme ukládat 500 Kč počátkem období, abychom za čtvrt roku měli při 3 % p.a. a při čtvrtletním připisování úroků naspořenou částku 6 024,375 Kč?

   [12 krát za čtvrtletí, tj. každý týden za předpokladu, že měsíc má 4 týdny]

7. Jak dlouho musíme spořit koncem každého měsíce 500 Kč, abychom uspořili 50 000 Kč při neměnné úrokové sazbě 8 % p.a.? (minimalizujeme celkovou výši vkladů)

   [6 let 5 měsíců spořit a dalších 29 dnů nechat jenom úročit (bez vkladu)]

8. Při měsíční předlhůtním spoření 10 Kč a úrokové sazbě 3 % p.a. a ročním připisováním úroků určete uspořenou částku za 13 let.

   [1 904,59 Kč]

9. Pan Mercedes plánuje nákup nového auta za 3 roky a počítá s nákupní cenou 320 000 Kč. Svoje současné auto staré dva roky hodlá prodat a odhaduje jeho cenu v době prodeje na 80 000 Kč. Na zbytek ceny nového vozu chce pan Mercedes ukládat na začátku každého čtvrtletí stejnou částku na svůj účet v bance, při úrokové sazbě 12 % p.a. a ročním úročení, aby měl potřebnou částku za tři roky k dispozici. Kolik bude činit tento vklad?

   [16 540,41 Kč]

10. Klient ukládal po dobu deseti let koncem roku 10 000 Kč na vkladní knížku. V té době spořitelna úročila vklady první 4 roky 10 % p.a. a 9,5 % p.a. posledních 6 let. Jaká je hodnota naspořené částky pět let po posledním vkladu, jestliže úroková sazba 9,5 % p.a. trvá?

    [245 879,92 Kč]

11. Na schůzce 5 let po promoci se absolventi fakulty dohodli, že příští schůzku 10 let po promoci uspořádají jako jubilejní a slavnostní, v luxusním podniku. Na krytí předpokládaných nákladů souhlasili s tím, že každý pošle pokladníkovi ročníku na konci každého pololetí 50 Kč. Jestliže všech 100 absolventů fakulty tento závazek dodrží při dožití všech a pokladník vždy na konci pololetí uloží peníze do banky při úrokové sazbě 4 % p.a. úročeno pololetně, kolik bude naspořeno na konci 10. roku po promoci?

[54 748,60 Kč]

12. Otec od narození dcery ukládal počátkem každého měsíce 500 Kč při neměnné úrokové sazbě 4,5 % p.a. s podmínkou, že si dcera tento vklad vybere při dovršení 18 let. Jaká byla hodnota naspořené částky v době výběru? (Předpokládáme, že se otec dožil 18. narozenin dcery)

[165 058,06 Kč]

*13. Kolik Kč uspoříte za 6 let, jestliže ukládáte začátkem každého čtvrtletí 15 000 Kč při úrokové sazbě 2,5 % p.a. a při měsíčním připisování úroků?

[389 584,78 Kč]

*14. Jakou částku musíte pravidelně ukládat koncem každého roku, jestliže chcete naspořit 1 mil. Kč za 13 let při úrokové sazbě 3 % p.a. a při pololetním připisování úroků?

[63 939,90 Kč]