

Poznámka:

Úmor je splátka jistiny dluhu, tedy část splátky, o kterou se snižuje výše dlužné částky.

Umořovací plán je přehled výše splátek úvěru včetně úroků z hlediska jejich časového rozložení. Obsahuje výši splátky, výši úmoru dluhu, výši úroku z dluhu, stav dluhu po odečtení úmoru (zbývající dlužnou částku).

Anuitní splátka (anuita) je splátka opakující se v pravidelných časových intervalech. Tyto platby mohou být stále stejné – konstantní anuita, ale není to pravidlem.

Při výpočtech budeme používat následující označení:

V – výše úvěru

s – výše anuitní splátky

i – úroková míra vyjádřená desetinným číslem

t – úrokovací období banky

n – počet anuit

Budeme využívat tzv. německý standard 30E/360, což je metoda určování délky úrokovacího období, kdy počítáme, že každý měsíc má 30 dnů, tedy rok má 360 dnů.

Využijeme zejména následující vztah:

$$s = \frac{V \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{1 - \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^{-n}}$$

Samozřejmě v případě, že úrokovací období bude jeden rok, můžeme ze vztahů zlomek $\frac{t}{360}$

vynechat, protože když dosadíme za t = 360, pak dostaneme zlomek $\frac{360}{360} = 1$.

Řešené úlohy:

- 1) Banka poskytla podnikateli koncem roku 2010 úvěr ve výši 1000000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 12% (úrokovací období je jeden rok) a podnikatel ho má splatit ve třech stejných splátkách vždy na konci roku. První dvě splátky budou činit 400000 Kč.

- a) Určete výši třetí splátky.
b) Jakou částku zaplatí podnikatel bance celkem.
c) Sestavte umořovací plán.

- a) Poslední splátka bude rovna výši dluhu na konci třetího roku (2013). Určíme tedy výše dluhu na koncích jednotlivých let:

Konec roku 2011 před první splátkou:

Banka nejprve připíše úroky, tedy dluh bude činit:

$$1000000 \text{ Kč} + 0,12 \cdot 1000000 \text{ Kč} = 1000000 \text{ Kč} + 120000 \text{ Kč} = 1120000 \text{ Kč}$$

Konec roku 2011 po první splátce:

$$1120000 \text{ Kč} - 400000 \text{ Kč} = 720000 \text{ Kč}$$

Konec roku 2012 před druhou splátkou:

Banka nejprve připíše úroky, tedy dluh bude činit:

$$720000 \text{ Kč} + 0,12 \cdot 720000 \text{ Kč} = 720000 \text{ Kč} + 86400 \text{ Kč} = 806400 \text{ Kč}$$

Konec roku 2012 po druhé splátce:

$$806400 \text{ Kč} - 400000 \text{ Kč} = 406400 \text{ Kč}$$

Konec roku 2013 před poslední splátkou:

Banka nejprve připíše úroky, tedy dluh bude činit:

$$406400 \text{ Kč} + 0,12 \cdot 406400 \text{ Kč} = 406400 \text{ Kč} + 48768 \text{ Kč} = 455168 \text{ Kč}$$

Výše třetí splátky bude 455168 Kč.

- b) Celkovou částku získáme jakou součet jednotlivých splátek, tedy

$$400000 \text{ Kč} + 400000 \text{ Kč} + 455168 \text{ Kč} = 1263296 \text{ Kč}$$

- c) Umořovací plán:

	Splátka (Kč)	Úrok (Kč)	Úmor (Kč)	Stav dluhu (Kč)
Počáteční stav	-	-	-	1000000
Konec r. 2011	400000	120000	280000	720000
Konec r. 2012	400000	86400	313600	406400
Konec r. 2013	455168	45768	406400	0

- 2) Banka poskytla podnikateli koncem roku 2010 úvěr ve výši 1000000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 12 % (úrokovací období je jeden rok) a podnikatel ho má splatit ve třech konstantních anuitách (stejných splátkách) vždy na konci roku (tedy splátky budou na konci prosince 2011, 2012 a 2013). Urči výši jedné splátky. Kolik peněz zaplatí podnikatel na úrocích?

Řešení:

Příklad nejprve vyřešíme bez využití vzorce:

Výši splátky označíme s:

Konec roku 2011 před první splátkou:

Banka nejprve připíše úroky, tedy dluh bude činit:

$$1000000 \text{ Kč} + 0,12 \cdot 1000000 \text{ Kč} = (1 + 0,12) \cdot 1000000 \text{ Kč}$$

Konec roku 2011 po první splátce:

$$(1 + 0,12) \cdot 1000000 - s$$

Konec roku 2012 před druhou splátkou:

Banka nejprve připíše úroky, tedy dluh bude činit:

$$[(1 + 0,12) \cdot 1000000 - s] \cdot (1 + 0,12)$$

Konec roku 2012 po druhé splátce:

$$[(1 + 0,12) \cdot 1000000 - s] \cdot (1 + 0,12) - s$$

Konec roku 2013 před poslední splátkou:

Banka nejprve připíše úroky, tedy dluh bude činit:

$$\{[(1 + 0,12) \cdot 1000000 - s] \cdot (1 + 0,12) - s\} \cdot (1 + 0,12)$$

Konec roku 2013 po druhé splátce:

$$\{[(1 + 0,12) \cdot 1000000 - s] \cdot (1 + 0,12) - s\} \cdot (1 + 0,12) - s$$

Po třetí splátce již musí být úvěr splacen, tedy musí platit rovnice:

$$\{[(1 + 0,12) \cdot 1000000 - s] \cdot (1 + 0,12) - s\} \cdot (1 + 0,12) - s = 0$$

$$[(1,12 \cdot 1000000 - s) \cdot 1,12 - s] \cdot 1,12 - s = 0$$

$$(1,12^2 \cdot 1000000 - 1,12s - s) \cdot 1,12 - s = 0$$

$$1,12^3 \cdot 1000000 - (1,12^2 s + 1,12s + s) = 0$$

$$1,12^3 \cdot 1000000 - s(1,12^2 + 1,12 + 1) = 0$$

$$s = \frac{1,12^3 \cdot 1000000}{1,12^2 + 1,12 + 1}$$

$$s \cong \underline{\underline{416349 \text{ Kč}}}$$

Rovnici jsme upravili a vyjádřili z ní neznámou s . Vypočítali jsme, že anuitní splátka bude činit 416349 Kč.

Pozn.: Využili jsme zaokrouhlení na koruny (na nejbližší měnovou jednotku v oběhu), ale samozřejmě v případě bezhotovostní platby by bylo možné zaokrouhlování i na haléře a záleželo by na smluvních podmínkách.

Celkově tak podnikatel zaplatí částku:

$$3s = 3 \cdot 416349 = 1249047 \text{ Kč}$$

Na úrocích tak zaplatil:

$$1249047 \text{ Kč} - 1000000 \text{ Kč} = 249047 \text{ Kč}$$

Nyní (pro ověření správnosti našeho výpočtu) využijeme vzorec pro výpočet anuity: Obecně pokud banka poskytne klientovi úvěr V s úrokovou mírou i při úrokovacím období t dnů a dlužník splatí úvěr n anuitami, jež budou spláceny jednou za úrokovací období, pak výši anuitní splátky vypočítáme:

$$s = \frac{V \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{1 - \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^{-n}} = \frac{1000000 \cdot 0,12 \cdot \frac{360}{360}}{1 - \left(1 + 0,12 \cdot \frac{360}{360}\right)^{-3}} = \frac{1000000 \cdot 0,12}{1 - 1,12^{-3}} \cong 416349$$

- 3) Banka poskytla podnikateli úvěr na 10 let ve výši 1000000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 9 % (úrokovací období je jeden rok) a podnikatel ho má splatit v deseti stejných splátkách vždy na konci roku.
- Urči výši jedné splátky (zaokrouhlené na Kč).
 - Kolik peněz zaplatí podnikatel na úrocích?

Řešení:

- a. Opět bylo možné využít odvození z minulého příkladu, nyní však rovnou využijeme vzorec pro výpočet výše anuity:

$$s = \frac{V \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{1 - \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^{-n}} = \frac{1000000 \cdot 0,09}{1 - (1 + 0,09)^{-10}} \cong 155820$$

$$s \cong 155820 \text{ Kč}$$

Výše jedné splátky je 155820 Kč.

- b. Celkem podnikatel zaplatí 10 splátek po 155820 Kč, tedy 1558200 Kč.
Na úrocích tedy zaplatí $1558200 - 1000000 = 558200$ Kč.

- 4) Pan Veselý získal hypoteční úvěr ve výši 1500000 Kč na dobu 15 let a roční úrokovou mírou 5,5 % fixovanou na celou dobu splácení. Úvěr bude splácet měsíčními anuitami.
- Urči výši anuity (zaokrouhlené na Kč) a celkovou částku, kterou pan Veselý bance měsíčními anuitami splatí. Kolik by zaplatil na úrocích?
 - Urči výši anuity v případě, že by pan Veselý měl daný úvěr na 30 let a částku, kterou by celkem zaplatil. Kolik by zaplatil na úrocích?
 - O kolik více zaplatí pan Veselý na úrocích při delší době splácení?

a. Opět využijeme vzorec pro anuitní splátku a dosadíme:

$$V = 1500000 \text{ Kč}, i = 0,055, t = 30, n = 12 \cdot 15 = 180$$

$$s = \frac{V \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{1 - \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^{-n}} = \frac{1500000 \cdot 0,055 \cdot \frac{30}{360}}{1 - \left(1 + 0,055 \cdot \frac{30}{360}\right)^{-180}} \cong 12256$$

$$s = 12256 \text{ Kč}$$

Výše anuity je tedy 12256 Kč.

Celkově klient bance zaplatí 180 splátek po 12256 Kč, tedy $180 \cdot 12256 \text{ Kč} = 2206080 \text{ Kč}$

Na úrocích zaplatí:

$$(2206080 - 1500000) \text{ Kč} = 706080 \text{ Kč}$$

b. Kdyby pan Veselý získal stejný úvěr na 30 let, pak by platilo:

$$V = 1500000 \text{ Kč}, i = 0,055, t = 30, n = 12 \cdot 30 = 360$$

$$s_1 = \frac{V \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{1 - \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^{-n}} = \frac{1500000 \cdot 0,055 \cdot \frac{30}{360}}{1 - \left(1 + 0,055 \cdot \frac{30}{360}\right)^{-360}} \cong 8517$$

$$s_1 = 8517 \text{ Kč}$$

Výše anuity tedy byla 8517 Kč.

Celkově by pan Veselý zaplatil 360 splátek po 8517 Kč, tedy $360 \cdot 8517 \text{ Kč} = 3066120 \text{ Kč}$

Na úrocích by zaplatil:

$$(3066120 - 1500000) \text{ Kč} = 1566120 \text{ Kč}$$

c. Rozdíl ve výši úroků v jednotlivých variantách je $(1566120 - 706080) \text{ Kč} = 860040 \text{ Kč}$

Při delší době splácení by pan Veselý na úrocích zaplatil o 860040 Kč více.

- 5) Pan Nový je schopen každoročně po dobu deseti let na konci roku splácet částku 50000 Kč. Jak velkou půjčku si může vzít na roční úrok 15 %?

Řešení:

Opět vyjdeme ze vzorce pro výpočet konstantní anuity a z něho vyjádříme proměnnou V:

$$s = \frac{V \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{1 - \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^{-n}} = \frac{V \cdot i \cdot \frac{360}{360}}{1 - \left(1 + i \cdot \frac{360}{360}\right)^{-n}}$$
$$s = \frac{V \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$
$$V = \frac{s[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} = \frac{50000 \cdot (1 - 1,15^{-10})}{0,15} \cong 250938$$
$$\underline{\underline{V = 250938 \text{ Kč}}}$$